

УДК 532.62, 514.18

DOI <https://doi.org/10.32782/pet-2023-2-8>

Ганна ШАВАРОВА

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри експериментальної фізики, інформаційних та освітніх технологій, Волинський національний університет імені Лесі Українки, пр. Волі 13, м. Луцьк, Україна, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0251-9327>

SCOPUS-AUTHOR ID: 6506685303

Богдан МОЛОКО

студент 5-го курсу навчально-наукового фізико-технологічного інституту, Волинський національний університет імені Лесі Українки, пр. Волі 13, м. Луцьк, Україна, 43025

Бібліографічний опис статті: Шаварова Г., Молоко Б. (2023). Мінімальні поверхні як приклад реалізації міжпредметних зв'язків при вивченні поверхневого натягу. *Фізика та освітні технології*, 2, 57–66, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2023-2-8>

МІНІМАЛЬНІ ПОВЕРХНІ ЯК ПРИКЛАД РЕАЛІЗАЦІЇ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ

Взаємодія між різними галузями науки допомагає переносити знання з одного сектора в інший. Використання міжпредметних зв'язків при вивченні навчальних дисциплін дозволяє студентам бачити загальний контекст і структуру знань, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу і збагачує їх розуміння предмету. Демонстрація взаємозв'язків з іншими дисциплінами робить навчання більш цікавим та практичним, сприяє розвитку комплексного підходу до вирішення проблем, та допоможе студентам більш свідомо обрати майбутню професію.

Цим питанням присвячено багато методичних праць, у яких детально висвітлені теоретичні аспекти: значення міжпредметних зв'язків, їх класифікація, методи впровадження у навчальний процес, тощо.

Наша стаття доповнює ці дослідження конкретним прикладом: розглядається взаємозв'язок фізики, математики, комп'ютерних наук, дизайну та архітектури, хімії, кристалографії, який встановлювався протягом періоду понад 200 років. Ми прослідковуємо, як одне фізичне явище, а саме поверхневий натяг рідин, підштовхнуло математиків до відкриття мінімальних поверхонь. Розвиток комп'ютерних технологій і 3D-друку дозволив моделювати і візуалізувати мінімальні поверхні, що надихнуло архітекторів до створення енерго- та ресурсоощадних проектів і нових будівельних технологій. Побудовані теоретично мінімальні поверхні нещодавно були виявлені у полімерах, кристалах багатокомпонентних сполук, і знову повернулись у фізику: їх модифікації використовуються у дослідженні чорних дір.

Крім того, у роботі висвітлені окремі аспекти явища поверхневого натягу, які, як правило, не розглядаються у курсі молекулярної фізики, зокрема природа сил притягання між молекулами поверхневого шару та особливості взаємодії молекул води з молекулами поверхнево активних речовин.

Ключові слова: поверхневий натяг, поверхнево-активні речовини, мильні плівки, мінімальні поверхні, міжпредметні зв'язки.

Hanna SHAVAROVA

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Experimental Physics, Information and Educational Technologies, Volyn National University named after Lesya Ukrainka, 13 Volya ave., Lutsk, Ukraine, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0251-9327>

SCOPUS-AUTHOR ID: 6506685303

Bohdan MOLOKO

5th year student, Educational and Scientific Institute of Physics and Technology, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya Ave., Lutsk, Volyn region, Ukraine, 43025

To cite this article: Shavarova H., Moloko B. (2023). Minimalni poverchni yak pryklad realizatsii mizhpredmetnykh zvyazkiv pry vyvchenni poverhnevoho natyahu [Minimal surfaces as an example of the implementation of intersubject connections in the study of surface tension]. *Physics and Educational Technology*, 2, 57–66, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2023-2-8>

MINIMAL SURFACES AS AN EXAMPLE OF THE IMPLEMENTATION OF INTERSUBJECT CONNECTIONS IN THE STUDY OF SURFACE TENSION

Interaction between different fields of science helps transfer knowledge from one sector to another. The use of interdisciplinary connections when studying academic disciplines allows students to see the general context and structure of knowledge, which contributes to better assimilation of the material and enriches their understanding of the subject. Demonstration of relationships with other disciplines makes learning more interesting and practical, contributes to the development of a complex approach to solving problems. and will help students choose their future profession more consciously.

Many methodical works are devoted to these issues, in which theoretical aspects are covered in detail: the importance of intersubject relationships, their classification, methods of implementation in the educational process, etc.

Our article complements these studies with a concrete example: it examines the relationship between physics, mathematics, computer science, design and architecture, chemistry, and crystallography, which has been established over a period of more than 200 years. We trace how one physical phenomenon, namely the surface tension of liquids, prompted mathematicians to discover minimal surfaces. The development of computer technologies and 3D printing made it possible to model and visualize minimal surfaces, which inspired architects to create energy- and resource-saving projects and new construction technologies. Theoretically constructed minimal surfaces have recently been discovered in polymers, crystals of multicomponent compounds, and have again returned to physics: their modifications are used in the study of black holes.

In addition, the work highlights certain aspects of the phenomenon of surface tension, which, as a rule, are not considered in the course of molecular physics, in particular, the nature of the attractive forces between the molecules of the surface layer and the peculiarities of the interaction of water molecules with molecules of surface-active substances.

Key words: surface tension, surface-active substances, soap films, minimal surfaces, intersubject connections.

Вступ

У сучасному житті практично усі проблеми і виклики вимагають інтегрованого підходу та знань з багатьох галузей. Для реалізації проєктів залучаються фахівці різного профілю, які мають ефективно взаємодіяти між собою. Навчальні заклади повинні готувати учнів та студентів до розв'язання реальних завдань у різних сферах діяльності, розвиваючи комплексне мислення, вміння думати творчо і розвивати навички інтегрованого підходу до вирішення проблем.

Тому проблема використання міжпредметних зв'язків у навчанні є важливою і актуальною та привертає увагу дослідників. Так колектив авторів з провідних університетів України та з-за кордону (Vasylyshyn та ін., 2021) висувують цікаву тезу про те, що використання міжпредметної інтеграції при вивченні фізики у вищій школі дозволить підготувати фахівців з широким кругозором, що дозволить майбутнім фізикам успішно конкурувати на ринку праці. А якщо з певних причин фахівець не зможе працювати за одержаною спеціальністю, такий підхід до навчання дозволить йому вибрати нову професію, в якій він зможе

максимально проявити себе, використовуючи раніше набуті компетенції.

Бібікова І. при вивченні оптики пропонує використовувати твори образотворчого мистецтва, фотографії, ілюструвати фізичні явища цікавими історичними фактами (Бібікова І.В., 2019).

У нашій роботі ми показуємо, як дослідження мильних плівок призвело до революційних відкриттів і винаходів у різних сферах нашого життя. І в усіх застосуваннях використанні основні фізичні властивості цих плівок: мінімальна площа, нульова середня кривина та стійкість (скомпенсованість механічних напруг у кожній точці).

Виклад основного матеріалу дослідження. Поверхневий натяг рідин

Як відомо, у рідині атоми чи молекули здійснюють нерегулярні коливання навколо тимчасового положення рівноваги, у якому результуюча сил взаємодії з навколишніми частинками рівна нулю (рис. 1, ліва частина). Внаслідок флуктуацій температури, а отже і кінетичної енергії, частинки час від часу переміщуються з одного рівноважного положення в інше. Залежно від типу зв'язку між частинками сили

взаємодії можуть бути ненаправленими (металічний або ван-дер-ваальсівський зв'язок) або направленими. До рідин з направленими зв'язками належить вода, сили притягання між її молекулами реалізуються в основному водневими зв'язками. Це зумовлює особливі властивості води, зокрема і утворення та стабільність плівок мильних розчинів.

На відміну від твердих тіл та газів рідини мають вільну поверхню. У стані рівноваги вільна поверхня рідини набуває такої форми, при якій її поверхнева енергія, а отже і площа, *мінімальна*. При визначенні форми поверхні рідини слід враховувати і дію зовнішніх сил: сили тяжіння, сили опору середовища для краплин, що рухаються, а також явища змочування на межі з твердим тілом.

На рис. 1 видно, що сили притягання між поверхневими молекулами і їх нижніми «сусідами» набагато менші, ніж поверхневих молекул між собою. Експериментально підтверджено, що сили поверхневого натягу діють по дотичній до поверхні. Пояснюється це тим, що у поверхневому шарі товщиною у кілька діаметрів молекул щільність рідини (рис. 2 *b*) змінюється, поки не досягне постійного значення всередині рідини. У цьому шарі, відповідно до залежності потенціалу Ленарда-Джонса від відстані (рис. 3), переважають сили притягання.

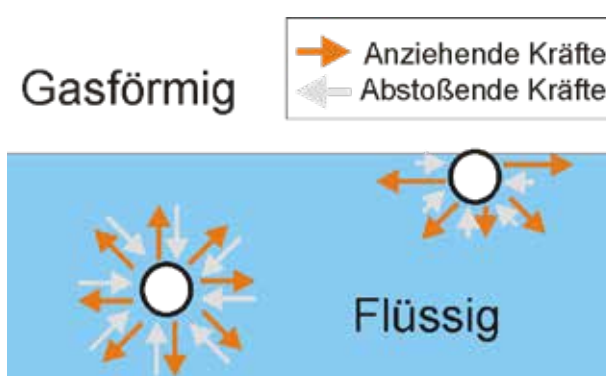


Рис. 1. Схематичне зображення сил, що діють на частинку рідини в об'ємі і на межі з газоподібною фазою. Темні стрілки – сили притягання, світлі – сили відштовхування (Von Galactico)

Тому на поверхню рідини діє сила по дотичній до цієї поверхні. Рис. 2 (*c*) описує механічну напругу, яка виникає у рідині в горизонтальному напрямку. Вона відповідає силі поверхневого натягу і локалізована в поверхневому шарі рідини товщиною у кількох діаметрів молекули.

Отже, поверхня рідини поводить себе як еластична плівка, натягнута на певний контур. Площа поверхні є найменшою з можливих з урахуванням сил поверхневого натягу та зовнішніх сил (наприклад, гравітації). Для того, щоб можна було знехтувати гравітацією і отри-

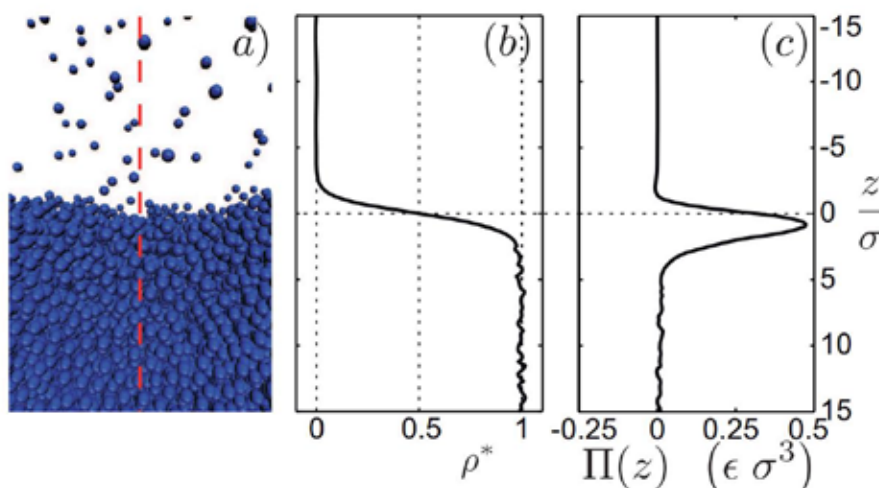


Рис. 2. Поверхня рідина-пара. Вертикальна вісь проградуєвана в одиницях діаметрів молекул σ . (a) – комп'ютерна симуляція поверхні рідини для частинок, що взаємодіють відповідно до потенціалу Ленарда-Джонса (рис. 3). (b) – середній в часі нормований розподіл густини ρ^* вздовж осі z (перпендикулярно до поверхні). (c): тангенціальна сила, що діє з боку лівої частини системи на праву, віднесена до одиниці площі (тобто різниця між тангенціальною і нормальною складовими тензора напруг Π) (Marchand A. et.al., 2011)

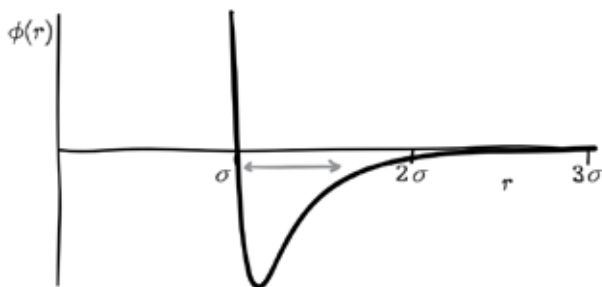


Рис. 3. Міжмолекулярний потенціал Ленарда-Джонса ϕ . На відстанях між молекулами, менших точки мінімуму, відбувається відштовхування, більших – взаємне притягання. σ – діаметр «твердої оболонки» молекули. Сіра стрілка показує амплітуду теплових коливань, які у рідині призводять до суттєвих варіацій міжмолекулярних відстаней для різних пар молекул (Marchand A. et.al., 2011)

мати поверхню найменшої площі, обмежену контуром довільної форми, слід використовувати мильні плівки.

Будова та властивості мильних плівок.

Серед усіх відомих неметалічних рідин вода має найбільший коефіцієнт поверхневого натягу при кімнатній температурі: 72,75 мН/м при 20°C. Зменшити поверхневий натяг води можна додаванням поверхнево активних речовин (ПАР), які впорядковано розташовуються на поверхні, зменшуючи поверхневу енергію.

Дія ПАР обумовлена їх молекулярною структурою. Ці речовини зазвичай складаються з гідрофобного («водовідштовхувального») вуглеводневого залишку та гідрофільної («водолубної») частини молекули; тобто вони амфифільні («люблять обох»). На наступних малюнках кружками позначені гідрофільні частини молекули.

Молекули води є диполями, крім того, між ними існує водневий зв'язок, тому вони розташовані шарами (рис. 4).

Якщо у воду додавати ПАР, вони утворюють тонкий шар на поверхні води і таким чином знижують поверхневий натяг води. У молекулах ПАР гідрофільні кінці спрямовані до води, гідрофобні – до повітря (рис. 5).

ПАР, що перевищують критичну концентрацію, зазвичай утворюють у воді невеликі сферичні агрегати – міцели. Молекули ПАР вирівнюються таким чином, що гідрофобні

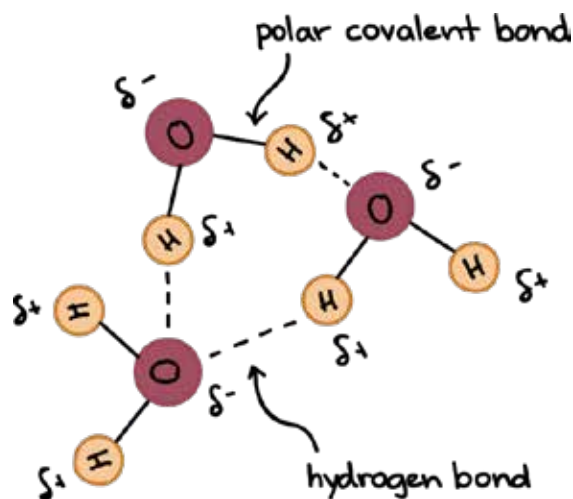


Рис. 4. Структура молекули води та водневі зв'язки у воді (Structure of water and hydrogen bonding)

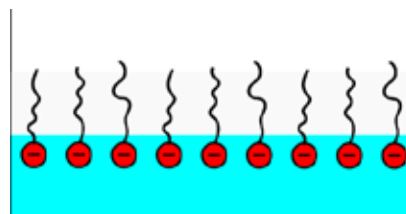


Рис. 5. Розташування молекул ПАР на поверхні води (Von Roland.chem, 52346456)

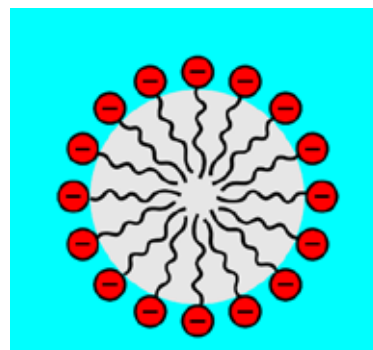


Рис. 6. Скупчення аніонних ПАР у воді (сферична міцела) (Von Roland.chem, 52346399)

кінці збираються всередині міцел, а гідрофільні кінці орієнтуються у бік води. ПАР збільшують текучість води, можуть відокремлювати частки жиру чи бруду від твердих поверхонь і захоплювати їх у міцели. На цьому ґрунтується дія мийних засобів.

При збовтуванні мильних розчинів утворюється піна, що складається з мильних бульбашок, утворених плівками розчину ПАР у воді.

Такі самі плівки можна одержати, зануривши у воду довільний каркас. Піна та плівки великих розмірів з чистої води нестійкі. У мильному розчині молекули ПАР розташовані переважно на межі повітря/вода (рис. 7), гідрофобними кінцями назовні.

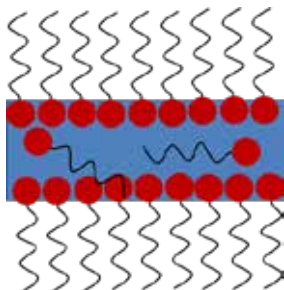


Рис. 7. Впорядкування ПАР на поверхнях мильної плівки. (Von Roland.chem, 52346456)

ПАР стабілізують плівку, оскільки вони створюють відштовхування між обома поверхнями плівки, запобігаючи її витонченню та, як наслідок, розриву. Відштовхування поверхонь є наслідком того, що ПАР через особливості структури молекул не можуть переплітатися. Якщо вони заряджені, то додається ще й електростатичний механізм.

Крім того, ПАР роблять плівку більш стійкою до коливань товщини. За наявності градієнта поверхневого натягу рідина перетікає в область з більшим поверхневим натягом (ефект Марангоні). Тобто, якщо у деяких ділянках концентрація ПАР зростає, поверхневий натяг зменшиться, і сили Марангоні будуть рухати молекули ПАР в області з меншою концентрацією, гомогенізуючи плівку і роблячи її більш еластичною. З часом плівка лопається через випаровування води. Крім того, вода стікає донизу, а вгорі плівка витонщується і руйнується.

Щоб запобігти руйнуванню плівки, необхідно зменшити перетікання води донизу. Оскільки на гравітацію вплинути ми не можемо, зменшити рухливість молекул води вдається шляхом додавання у воду великих органічних молекул: гліцерину і цукрози. Ці молекули одночасно сповільнюють випаровування і витонщення плівки. Руйнуванню мильних плівок сприяють також різні включення: маленькі бульбашки повітря, нерозчинні домішки.

Для експериментів з мильними плівками ми використовували такий розчин: 750 мл дисти-

льованої води; 250 мл рідини для миття посуду (Fairly); 125 мл гліцерину; 3 чайні ложки цукру, розчиненого у воді. Чим більше гліцерину, тим міцніші плівки.

Мильні плівки – мінімальні поверхні

Якщо у мильний розчин занурити дротяне кільце, воно зтягнеться плоскою мильною плівкою. Два однакових кільця, стулених у розчині і розведених у повітрі, не утворять циліндричної плівки. (рис. 8). Це легко пояснити, якщо врахувати 2 обставини. По-перше, в умовах рівноваги векторна сума сил поверхневого натягу, що діють на кожен елемент поверхні з боку сусідніх, має бути рівною нулю. Бічна поверхня циліндра радіуса R має кривину $1/R$ у площині перпендикулярній до осі, і нульову кривину у площині, що проходить через вісь. У такому разі векторна сума сил поверхневого натягу \vec{F}_n для елемента бічної поверхні не може бути рівною нулю. \vec{F}_n скомпенсуються, коли кривина елемента поверхні у вертикальному напрямку буде $-1/R$, тобто у кожній точці поверхні буде нульова середня кривина.



Рис. 8. Мильна плівка, що спирається на 2 кільця

По друге, поверхнева енергія (а отже і площа плівки) в умовах рівноваги має бути мінімальною, тобто площа поверхні плівки менша за бічну площу циліндра, побудованого на тих самих основах.

Цікаві результати ми отримали, занурюючи у мильний розчин каркаси геометричних фігур (рис. 9-10). Виявляється що сукупність граней не є мінімальною площиною, що спирається на ребра багатогранників.

Поверхні мильних плівок, які утворюються на ребрах геометричних фігур, мали однакове взаємне розташування при кожному зану-



Рис. 9. Мінімальна поверхня на основі тетраедра



Рис. 10. Каркас ромбоєдра, занурений у мильний розчин. В центрі перетинка у вигляді ромба

ренні в розчин і повільному витягуванні. Розміри центральних чотирикутників теж завжди були однакові. Це ще раз доводить, що саме так розташовані поверхні мають площу, найменшу з усіх, що спираються на ребра фігури. Якщо всередині багатогранника стикаються 3 поверхні (рис. 9-10), кут між ними 120° , оскільки тільки у такому випадку рівнодійна сил поверхневого натягу на лінії перетину буде рівна нулю.

Для того, щоб знайти поверхню найменшої площі, обмежену довільним контуром,

достатньо занурити його у мильний розчин (рис. 11).



Рис. 11. Мінімальна поверхня на каркасі довільної форми

Мильні плівки є одним з прикладів відомих у математиці *мінімальних поверхонь*. Мінімальна поверхня – це поверхня з *нульовою середньою кривиною*. Такі поверхні локально (тобто у межах контуру, побудованого на гладкій поверхні) мають *найменшу площу*. Взагалі мінімальні поверхні можуть перетинатись, а також бути нескінченими.

Власне вивчаючи мильні плівки французький математик і фізик Лагранж у 1762 році поставив варіаційну задачу знайти рівняння поверхні найменшої площі, що обмежена певним замкнутим контуром, і вивів рівняння, що носить назву Ейлера–Лагранжа. Через кілька років були відкриті катеноїд і гелікоїд.

Катеноїд (рис. 9, 12) Катеноїд описується в циліндричних координатах параметричним рівнянням:

$$\rho = a \operatorname{ch} \frac{u}{a};$$

$$\varphi = v;$$

$$z = u$$

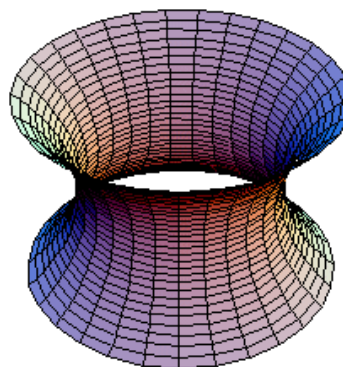


Рис. 12. Катеноїд (Catenoid)

Катеноїд – це поверхня обертання ланцюгової лінії $y = a \cdot \cos \frac{z}{h}$ навколо осі OZ. Такої форми набирає підвішений у 2-х точках ланцюг під дією сили тяжіння.

Саме за допомогою ланцюгів, підвішених на каркас, і мильних плівок прекував свої споруди відомий архітектор Отто Фрай, який створив новий напрям в архітектурі з використанням мінімальних поверхонь. Серед його робіт Німецький павільйон для Ехро 1968 в Монреалі, дахи Олімпійського стадіону в Мюнхені та колишнього Конгрессхалле в Берліні.

Кількість матеріалу, а разом з ним і вага даху, мінімальна для каркасутаких розмірів. Водночас збалансований натяг стабілізує всю конструкцію, оскільки натяг рівноважний у кожній точці даху, як на мильній плівці.

Гелікоїд (рис. 13, а) – поверхня, утворена прямою, що обертається навколо перпендикулярної до неї осі і одночасно поступально рухається вздовж цієї осі, відношення швидкості обертального та поступального руху є сталим. Рівняння гелікоїда:

$$x = u \cos v$$

$$y = u \sin v$$

$$z = hv$$

Мильну плівку у формі гелікоїда можна одержати, якщо спіраль закріпити навколо осі (рис. 13, в).

Форму гелікоїда мають спіраль ДНК (рис. 13,с), пандуси, сходи.

Завдяки дослідженням в таких галузях математики, як диференціальна геометрія, комплексний аналіз, теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних і варіаційне числення, стало можливим значно розширити сімейство мінімальних поверхонь. Мінімальні поверхні стали темою наукових досліджень, в молекулярній інженерії та матеріалознавстві, полімерній хімії та кристалографії. Вони дедалі ширше використовуються у будівництві та дизайні.

Досліджуючи структуру двофазного полімера, група дослідників під керівництвом Едвіна Л. Томаса виявила, що у стані рівноваги він розділяється на окремі фази (Thomas, E.L. et al, 1991) Розшифровка зображень із застосуванням комп'ютерного моделювання показала, що границі фаз є періодичними мінімальними поверхнями.

У кристалічних речовинах мінімальні поверхні можна спостерігати на поверхні кристала чи на окремих його ділянках (Шаварова, 23). Кристали цеоліту (рис. 14, б) складаються з кілець тетраедрів SiO_4^{4-} , AlO_4^{5-} , порожнини утворюють канали, заповнені водою. Після випаровування води каркас має вигляд мінімальної поверхні Шварца (рис. 14 а). Такі пористі структури використовують як молекулярні сита, адсорбенти, каталізатори, тощо.

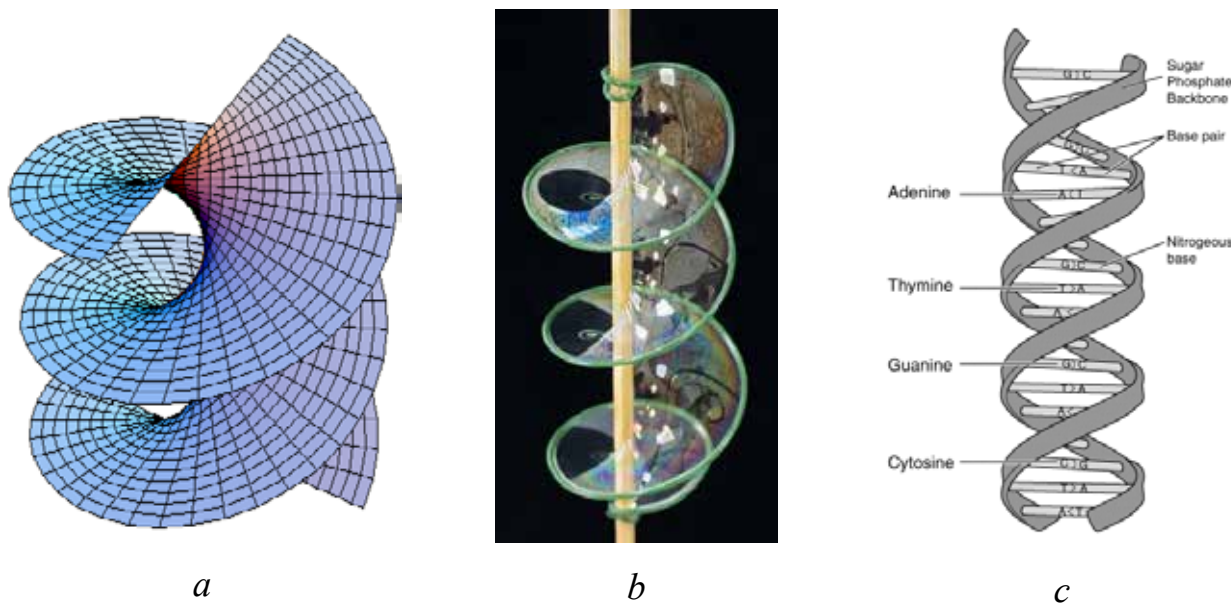


Рис. 13. а – гелікоїд (Helicoid); б – мильна плівка у формі гелікоїда; с – спіраль ДНК (Public Domain)

Мінімальну поверхню Шварца типу Р в основу конструкції одного з найвідоміших оперних театрів світу – Метрополітен-опери у м.Тайчжун (Тайвань) – поклав архітектор Тойо Іто.

Зведення архітектурних споруд у вигляді мінімальних поверхонь стимулювало пошук легких та міцних будівельних матеріалів і технологій будівництва.

У загальній теорії відносності певні розширення та модифікації поняття мінімальної поверхні, відомі як видимі горизонти [12]. На

відміну від горизонту подій, вони являють собою підхід до розуміння границь чорної діри, що базується на понятті кривизни.

Візуалізація мінімальних поверхонь

Практичне використання мінімальних поверхонь потребує їх візуалізації і створення моделей (рис. 15). Крім того, часто виникає потреба побудувати мінімальну поверхню на заданому контурі, яка була б стабільною у певному силовому полі, найчастіше в умовах гравітації.

Однією з таких програм для інтерактивних математичних експериментів є Surface Evolver.

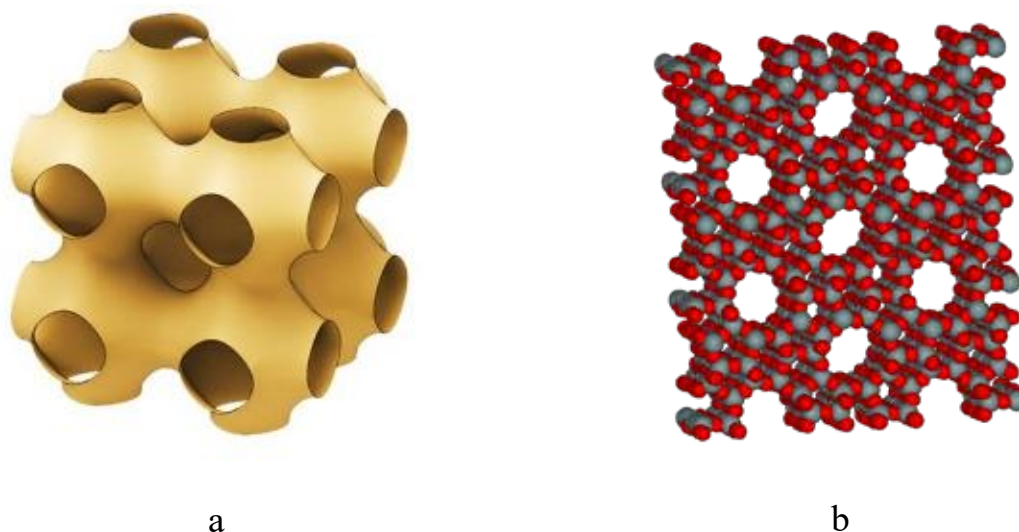


Рис. 14. а – мінімальна поверхня Шварца (Han, S.C. et al. (2016));
в - каркас кристала цеоліту (Zeolite)



Рис. 15. Метрополітен-опера у м.Тайчжун та її майже 4- метрова модель, на основі мінімальної поверхні Шварца Р (Toyo ito: taichung metropolitan opera)

Це інтерактивна програма для вивчення поверхонь, утворених поверхневим натягом та іншими енергіями з різними обмеженнями. Користувач визначає початкову поверхню у файлі даних. Evolver розвиває поверхню до мінімальної енергії за допомогою методу градієнтного спуску. Енергія в Evolver може бути комбінацією поверхневого натягу, гравітаційної енергії, квадрату середньої кривизни, тощо. Evolver може працювати з обмеженнями об'єму, граничними обмеженнями, граничними контактними кутами, заданою середньою кривизною, силою тяжіння. Поверхня може бути в навколишньому просторі довільної розмірності (Surface_Evolver).

Висновки

З наведених прикладів можна зробити висновок, що міжпредметна інтеграція розширює можливості знаходження нових інноваційних рішень і ідей. Комбінуючи знання з різних дисциплін, дослідники можуть вирішувати задачі з новими підходами, що може стимулювати творчість і призвести до революційних відкриттів і винаходів, як то новаторські архітектурні проекти. Демонстрація міжпредметних зв'язків в освітньому процесі розширює горизонти студентів і робить навчання більш цікавим і пізнавальним. Вони бачать, як знання з однієї дисципліни можуть доповнювати і розширювати розуміння іншої.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Бібікова І.В. (2019). Міжпредметна інтеграція як засіб реалізації stem-освіти на уроках фізики *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ № 9*, с. 194 -204. <https://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/2019/pp194-204.pdf>
2. Шаварова Г., Молоко Б. (2023). Програмні засоби для моделювання і візуалізації мінімальних поверхонь. *Актуальні проблеми фундаментальних наук: матеріали V Міжнар. наук. конф. (Луцьк – Світязь, 01-05 черв. 2023 р.)* Луцьк, Вежа-Друк, С. 89-90
3. Antonin Marchand, Joost H. Weijs, Jacco H. Snoeijer, Bruno Andreotti (2011). Why is surface tension a force parallel to the interface? *American Journal of Physics*. Т.79, № 10, С. 999–1008, doi:10.1119/1.3619866, arxiv:1211.3854
4. Catenoid. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=462898>
5. Han, S.C., Choi, J.M., Liu, G. *et al.* (2017). A Microscopic Shell Structure with Schwarz's D-Surface. *Sci Rep* 7, 13405 (2017). <https://doi.org/10.1038/s41598-017-13618-3>
6. Helicoid. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helicoid.PNG>
7. Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=510095>
8. Structure of water and hydrogen bonding <https://www.khanacademy.org/science/ap-biology/chemistry-of-life/structure-of-water-and-hydrogen-bonding/a/hydrogen-bonding-in-water>
9. Surface_Evolver. https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_Evolver
10. Thomas, E.L. ed al. (1991) Periodic Area Minimizing Surfaces in Microstructural Science. In: Concus, P., Finn, R., Hoffman, D.A. (eds) *Geometric Analysis and Computer Graphics. Mathematical Sciences Research Institute Publications*, Springer, New York, NY., vol 17. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9711-3_21
11. Toyo Ito: Taichung Metropolitan Opera <https://www.designboom.com/architecture/toyo-ito-taichung-metropolitan-opera/>
12. Vasylyshyn V. et. al. (2021). Competence-based approach in the training of physicists *Journal of Physics: Conference Series* 1889 022005 <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022005>
13. Von Galaktico – Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30900207>
14. Von Roland.chem – Eigenes Werk, CC0, URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=52346456>
15. Von Roland.chem – Eigenes Werk, CC0, URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=52346399>
16. Zeolite-ZSM-5-3D-vdW.png <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zeolite-ZSM-5-3D-vdW.png>

REFERENCES:

1. Bibikova I.V. (2019). Mizhpredmetna integratsiya yak zasib realizatsii stem-osvity na urokah fizyky [Intersubject integration as the means of realization of STEM education during the lessons of physics]. *Zbirnyk naukovykh prats fizyko-matematichnoho fakultetu DDPU № 19*, P. 194 -204. <https://ddpu.edu.ua/fizmatzbirnyk/2019/pp194-204.pdf>
2. Shavarova H., Moloko B. (2023). Programni zasoby dlya modeluvannya i vizualizatsii minimalnyh poverhon [Software tools for modeling and visualization of minimal surfaces]. *Aktualny problemy fundamentalnyh nauk: materialy V Mizhnar. nauk. konf. (Lutsk -Svityaz, 01-05 June 2023)*. Lutsk, Vezha-Druk, P.89-90.
3. Vasylyshyn V., Yekimov S., Nakhod S., Voytsekhovska Y., Otroshchenko N., Gavrilko T., Maryna Zheludenko M., Mikheev A., and Vynnyk T. (2021). Competence-based approach in the training of physicists. *Journal of Physics: Conference Series* 1889 022005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022005>

4. Von Galaktico – Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30900207>
5. Antonin Marchand, Joost H. Weijs, Jacco H. Snoeijer, Bruno Andreotti (2011). Why is surface tension a force parallel to the interface? *American Journal of Physics*. Т.79, № 10,, С. 999–1008, doi:10.1119/1.3619866, arxiv:1211.3854
6. Structure of water and hydrogen bonding <https://www.khanacademy.org/science/ap-biology/chemistry-of-life/structure-of-water-and-hydrogen-bonding/a/hydrogen-bonding-in-water>
7. Von Roland.chem – Eigenes Werk, CC0, URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=52346456>
8. Von Roland.chem – Eigenes Werk, CC0, URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=52346399>
9. Catenoid. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=462898>
10. Helicoid. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helicoid.PNG>
11. Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=510095>
12. Toyo Ito: Taichung Metropolitan Opera <https://www.designboom.com/architecture/toyo-ito-taichung-metropolitan-opera/>
13. Han, S.C., Choi, J.M., Liu, G. *et al.* (2017). Microscopic Shell Structure with Schwarz’s *D*-Surface. *Sci Rep* 7, 13405. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-13618-3>
14. Zeolite-ZSM-5-3D-vdW.png <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zeolite-ZSM-5-3D-vdW.png>
15. Thomas, E.L., Anderson, D.M., Martin, D.C., Hoffman, J.T., Hoffman, D. (1991). Periodic Area Minimizing Surfaces in Microstructural Science. In: Concus, P., Finn, R., Hoffman, D.A. (eds) *Geometric Analysis and Computer Graphics*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol 17. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9711-3_21
16. Surface_Evolver. https://en.wikipedia.org/wiki/Surface_Evolver