УДК 514.7: 524.8
DOI https://doi.org/10.32782/pet-2021-2-9

Дмитро ШВАЛІКОВСЬКИЙ
інженер кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А.В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, вул. Потапова, 9, м. Луцьк, Україна, 43000

Бібліографічний опис статті: Шваліковський, Д. (2021) Розклад Картана групи де Сіттера SO(1,4). Кватерніонні кути Ейлера. *Фізика та освітні технології, 2,* 57–61, doi: https://doi.org/10.32782/pet-2021-2-9

РОЗКЛАД КАРТАНА ГРУПИ ДЕ СІТТЕРА SO(1,4). КВАТЕРНІОННІ КУТИ ЕЙЛЕРА

Протягом останніх двадцяти років простори де Сіттера і анти-де Сіттера різних розмірностей виявилися в центрі уваги всієї теоретичної фізики високих енергій. В першу чергу це пов'язано з відповідністю між супергравітацією в п'ятивимірному просторі анти-де Сіттера і суперсиметричною теорією поля в чотирьох вимірах. Простір анти-де Сіттера виявився найбільш підходящим многовидом, на якому отримані непертурбативні результати в теорії суперструн і на якому природним чином будується теорія полів вищих спінів. У свою чергу, простір де Сіттера тісно пов'язаний з проблемами сучасної космології, являючись по суті теоретичною базою інфляційної космології. З іншого боку, простір-час де Сіттера і квантова теорія поля на цьому многовиді є предметом інтенсивного вивчення головним чином у зв'язку із завданням побудови квантової теорії гравітації в викривлених просторах.

Центральним питанням при вивченні квантових та класичних полів полів на просторі де Сіттера є докладний аналіз гомогенної групи до цього простору — групи де Сіттера. Необхідно класифікувати та описати однорідні простори групи SO(1,4) з точністю до підгруп SO(1,3) (група Лоренца), SO(4) (максимальна компактна підгрупа групи SO(1,4)), та SU(2). Ця задача розглядається в даній роботі за допомогою визначення всіх однорідних просторів виду M=SO(1,4)/H, де H — стаціонарна підгрупа. Елементи групи представлені у вигляді добутку однопараметричних матриць, що дозволяє чітко побачити зв'язок з кутами Ейлера в класичному тривимірному випадку.

Ключові слова: *простір де Сіттера, розклад Картана, кути Ейлера.*

Dmytro SHVALIKOVSKYI
Engineer of the Department of Theoretical and Computer Physics named by A.V. Svidzynskyi, Lesya Ukrainka Volyn National University, 9 Potapova Ave., Lutsk, Ukraine, 43000

To cite this article: Shvalikovskyi, D. (2021) Rozklad Kartana hrupy de Sittera SO(1,4). Kvaternionni kuty Eilera [Cartan decomposition of the de Sitter group SO(1,4). Quaternion Euler angles]. *Physics and educational technology, 2,* 57–61, doi: https://doi.org/10.32782/pet-2021-2-9

CARTAN DECOMPOSITION OF THE DE SITTER GROUP SO(1,4). QUATERNION EULER ANGLES

Over the last twenty years, the de Sitter and anti-de Sitter spaces of various dimensions have become the focus of all theoretical high-energy physics. This is primarily due to the correspondence between supergravity in the five-dimensional anti-de Sitter space and supersymmetric field theory in four dimensions. The anti-de Sitter space turned out to be the most suitable manifold, on which nonperturbative results were obtained in the theory of superstrings and on which the theory of higher spin fields is naturally built. In turn, de Sitter's space is closely connected with the problems of modern cosmology, being essentially the theoretical basis of inflationary cosmology. On the other hand, de Sitter space-time and quantum field theory on this manifold are the subject of intensive study, mainly in connection with the task of constructing a quantum theory of gravitation in curved spaces.

The central issue in the study of fields in the de Sitter space is a detailed analysis of a homogeneous group to this space — the de Sitter group. It is necessary to classify and describe homogeneous spaces of the group SO (1,4) up to subgroups SO (1,3) (Lorentz group), SO (4) (maximal compact subgroup of the group SO (1,4)), and SU (2). This problem is considered by determining all homogeneous spaces of the form M = SO (1,4) / H, where H is a stationary subgroup. The elements of the group are represented as the product of one-parameter matrices, which allows you to clearly see the relevance with the Euler angles in the classical three-dimensional case.

Key words: *de Sitter space, Cartan decomposition, Euler's angles.*

За сучасних уявлень наш простір-час приймається як чотиривимірний гіперболоїд $\boldsymbol{H}^4$ в п'ятивимірному просторі $\boldsymbol{R}^{1,4}$ (простір де Сіттера). Як відомо, гіперболоїд $\boldsymbol{H}^4$ є однорідним простором групи де Сіттера $SO_0(1,4)$, що є групою поворотів простору $\boldsymbol{R}^{1,4}$. У зв'язку з побудовою квантової теорії поля на $\boldsymbol{H}^4$ природним чином виникає задача поділу фізичних полів в термінах функцій представлення класу на однорідному просторі $\boldsymbol{H}^4$ групи $SO_0(1,4)$, тобто задача визначення хвильової функції як поля на групі де Сіттера. Аналогічна задача для тривимірного гіперболоїда $\boldsymbol{H}^3$ та інших однорідних просторів групи Пуанкаре була поставлена і частково розв'язана головним чином в зв'язку з об'єднанням просторово-часових і внутрішніх симметрій елементарних частинок.

Дамо огляд групової теорії $SO(1,4)$. При розгляді будемо користуватись певними аналогіями між універсальними накриттями групи Лоренца та групи де Сіттера, встановленими Такахаші [1]. А саме, універсальним накриттям $SO(1,4)$ є спінорна група, яка в свою чергу накривається симплектичною групою: $Spin_+(1,4) \cong Sp(1,1)$. Група $Spin_+(1,4)$ описується в термінах кватерніонних матриць 2×2. З іншого боку, універсальне накриття групи Лоренца $SO(1,3)$ описується в термінах комплексних матриць 2×2. Ця аналогія дозволяє застосувати представлення Гельфанда–Неймарка [2,3] групи Лоренца.

П'ятивимірний простір де Сіттера є гомогенним до групи $SO(1,4)$, що складається з дійсних матриць 5–го порядку з одиничним детермінантом, які залишають інваріантною квадратичну форму

$$Q(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

Алгебра Лі $\mathfrak{so}(1,4)$ групи $SO(1,4)$ складається з дійсних матриць

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{01} & 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{02} & a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34} \\ a_{04} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра $\mathfrak{so}(1,4)$ містить базові елементи форми

$$L_{rs} = -e_{rs} + e_{sr}, \quad s, r = 1,2,3,4, \quad s < r, \qquad (1)$$

$$L_{0r} = e_{0r} + e_{r0}, \quad r = 1,2,3,4, \qquad (2)$$

де e_{rs} є матрицею з елементами $(e_{rs})_{pq} = \delta_{rp}\delta_{sq}$. Базові елементи (1) і (2) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[L_{MN}, L_{RS}] = \eta_{NR}L_{MS} + \eta_{MS}L_{NR} - \eta_{MR}L_{NS} - \eta_{NS}L_{MR}, \qquad (3)$$

$$R, M, N, S = 0,1,2,3,4,$$

де $\eta_{k0} = \eta_{0k} = \delta_{0k}$, $\eta_{ks} = -\delta_{ks}$; $k, s = 1,2,3,4$. $SO(1,4)$ є 10–параметричною групою.

Максимальна компактна підгрупа K групи $SO(1,4)$ ізоморфна групі $SO(4)$ і складається з матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(4) \end{pmatrix}.$$

Для конструювання представлень групи $SO(1,4)$ використаємо розбиття Картана алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$ і розбиття Івасави групи $SO(1,4)$ [4]. В розбитті Картана $\mathfrak{so}(1,4) = \mathfrak{so}(4) + \mathfrak{p}$ підпростір $\mathfrak{p}$ складається з базових елементів (2). Група $SO(1,4)$ має дійсний ранг 1, тому комутативна підалгебра $\mathfrak{a}$ групи $\mathfrak{so}(1,4)$ є одновимірною. Оберемо матрицю L_{04} базовим елементом $\mathfrak{a}$. Отже, комутативна підгрупа A складається з матриць

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq \infty.$$

Використовуючи співвідношення (3) бачимо, що нільпотентна підалгебра $\mathfrak{n}$ алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$ визначається матрицями $L_{02} + L_{24}$, $L_{03} + L_{34}$ і $L_{01} + L_{14}$. Здійснивши експоненціальне накриття підалгебри $\mathfrak{n}$ на підгрупі N, знайдемо вигляд нільпотентної підгрупи N, що складається з матриць

$$\begin{pmatrix} 1 + (r^2 + s^2 + t^2)/2 & t & r & s & -(r^2 + s^2 + t^2) \\ t & 1 & 0 & 0 & -t \\ r & 0 & 1 & 0 & -r \\ s & 0 & 0 & 1 & -s \\ (r^2 + s^2 + t^2)/2 & t & r & s & 1 - (r^2 + s^2 + t^2) \end{pmatrix}.$$

Підгрупи K, A і N складають розбиття Івасави $SO(1,4) = SO(4) \cdot NA$. Відповідно до означення підгрупи M групи $SO(1,4)$, підгрупа M є ізоморфною до $SO(3)$. Отже, мінімальна параболічна підгрупа P описується розбиттям $P = SO(3) \cdot NA$. Оскільки ранг групи $SO(1,4)$ є одиничним, більше не існує параболічних підгруп, що містять P.

На групі $SO(1,4)$ існують два незалежні оператори Казиміра

$$F = L_{12}^2 + L_{13}^2 + L_{14}^2 + L_{23}^2 + L_{24}^2 + L_{34}^2 - L_{01}^2 - L_{02}^2 - L_{03}^2 - L_{04}^2,$$

$$W = (L_{12}L_{24} - L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23})^2 - (L_{12}L_{34} - L_{03}L_{24} + L_{04}L_{23})^2 - (L_{01}L_{34} - L_{03}L_{14} + L_{04}L_{13})^2 - (L_{01}L_{24} - L_{02}L_{14} + L_{04}L_{12})^2 - (L_{01}L_{23} - L_{02}L_{13} + L_{03}L_{12})^2.$$

Щоб розглядувані оператори були самоспряженими, запровадимо величини $J_{MN} = iL_{MN}$, використовуючи величини L_{MN} алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$. В унітарному представленні

За сучасних уявлень наш простір-час приймається як чотиривимірний гіперболоїд $\boldsymbol{H}^4$ в п'ятивимірному просторі $\boldsymbol{R}^{1,4}$ (простір де Сіттера). Як відомо, гіперболоїд $\boldsymbol{H}^4$ є однорідним простором групи де Сіттера $SO_0(1,4)$, що є групою поворотів простору $\boldsymbol{R}^{1,4}$. У зв'язку з побудовою квантової теорії поля на $\boldsymbol{H}^4$ природним чином виникає задача поділу фізичних полів в термінах функцій представлення класу на однорідному просторі $\boldsymbol{H}^4$ групи $SO_0(1,4)$, тобто задача визначення хвильової функції як поля на групі де Сіттера. Аналогічна задача для тривимірного гіперболоїда $\boldsymbol{H}^3$ та інших однорідних просторів групи Пуанкаре була поставлена і частково розв'язана головним чином в зв'язку з об'єднанням просторово-часових і внутрішніх симметрій елементарних частинок.

Дамо огляд групової теорії $SO(1,4)$. При розгляді будемо користуватись певними аналогіями між універсальними накриттями групи Лоренца та групи де Сіттера, встановленими Такахаші [1]. А саме, універсальним накриттям $SO(1,4)$ є спінорна група, яка в свою чергу накривається симплектичною групою: $Spin_+(1,4) \cong Sp(1,1)$. Група $Spin_+(1,4)$ описується в термінах кватерніонних матриць 2×2. З іншого боку, універсальне накриття групи Лоренца $SO(1,3)$ описується в термінах комплексних матриць 2×2. Ця аналогія дозволяє застосувати представлення Гельфанда–Неймарка [2,3] групи Лоренца.

П'ятивимірний простір де Сіттера є гомогенним до групи $SO(1,4)$, що складається з дійсних матриць 5–го порядку з одиничним детермінантом, які залишають інваріантною квадратичну форму

$$Q(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

Алгебра Лі $\mathfrak{so}(1,4)$ групи $SO(1,4)$ складається з дійсних матриць

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{01} & 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{02} & a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34} \\ a_{04} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра $\mathfrak{so}(1,4)$ містить базові елементи форми

$$L_{rs} = -e_{rs} + e_{sr}, \quad s, r = 1,2,3,4, \quad s < r, \qquad (1)$$

$$L_{0r} = e_{0r} + e_{r0}, \quad r = 1,2,3,4, \qquad (2)$$

де e_{rs} є матрицею з елементами $(e_{rs})_{pq} = \delta_{rp}\delta_{sq}$. Базові елементи (1) і (2) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[L_{MN}, L_{RS}] = \eta_{NR}L_{MS} + \eta_{MS}L_{NR} - \eta_{MR}L_{NS} - \eta_{NS}L_{MR}, \qquad (3)$$
$$R,\ M,\ N,\ S = 0,1,2,3,4,$$

де $\eta_{k0} = \eta_{0k} = \delta_{0k}$, $\eta_{ks} = -\delta_{ks}$; $k, s = 1,2,3,4$. $SO(1,4)$ є 10–параметричною групою.

Максимальна компактна підгрупа K групи $SO(1,4)$ ізоморфна групі $SO(4)$ і складається з матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(4) \end{pmatrix}.$$

Для конструювання представлень групи $SO(1,4)$ використаємо розбиття Картана алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$ і розбиття Івасави групи $SO(1,4)$ [4]. В розбитті Картана $\mathfrak{so}(1,4) = \mathfrak{so}(4) + \mathfrak{p}$ підпростір $\mathfrak{p}$ складається з базових елементів (2). Група $SO(1,4)$ має дійсний ранг 1, тому комутативна підалгебра $\mathfrak{a}$ групи $\mathfrak{so}(1,4)$ є одновимірною. Оберемо матрицю L_{04} базовим елементом $\mathfrak{a}$. Отже, комутативна підгрупа A складається з матриць

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \le \alpha \le \infty.$$

Використовуючи співвідношення (3) бачимо, що нільпотентна підалгебра $\mathfrak{n}$ алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$ визначається матрицями $L_{02} + L_{24}$, $L_{03} + L_{34}$ і $L_{01} + L_{14}$. Здійснивши експоненціальне накриття підалгебри $\mathfrak{n}$ на підгрупі N, знайдемо вигляд нільпотентної підгрупи N, що складається з матриць

$$\begin{pmatrix} 1 + (r^2 + s^2 + t^2)/2 & t & r & s & -(r^2 + s^2 + t^2) \\ t & 1 & 0 & 0 & -t \\ r & 0 & 1 & 0 & -r \\ s & 0 & 0 & 1 & -s \\ (r^2 + s^2 + t^2)/2 & t & r & s & 1 - (r^2 + s^2 + t^2) \end{pmatrix}.$$

Підгрупи K, A і N складають розбиття Івасави $SO(1,4) = SO(4) \cdot NA$. Відповідно до означення підгрупи M групи $SO(1,4)$, підгрупа M є ізоморфною до $SO(3)$. Отже, мінімальна параболічна підгрупа P описується розбиттям $P = SO(3) \cdot NA$. Оскільки ранг групи $SO(1,4)$ є одиничним, більше не існує параболічних підгруп, що містять P.

На групі $SO(1,4)$ існують два незалежні оператори Казиміра

$$F = L_{12}^2 + L_{13}^2 + L_{14}^2 + L_{23}^2 + L_{24}^2 + L_{34}^2 - L_{01}^2 - L_{02}^2 - L_{03}^2 - L_{04}^2,$$

$$W = (L_{12}L_{24} - L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23})^2 - (L_{12}L_{34} - L_{03}L_{24} + L_{04}L_{23})^2 - (L_{01}L_{34} - L_{03}L_{14} + L_{04}L_{13})^2 - (L_{01}L_{24} - L_{02}L_{14} + L_{04}L_{12})^2 - (L_{01}L_{23} - L_{02}L_{13} + L_{03}L_{12})^2.$$

Щоб розглядувані оператори були самоспряженими, запровадимо величини $J_{MN} = iL_{MN}$, використовуючи величини L_{MN} алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$. В унітарному представленні

За сучасних уявлень наш простір-час приймається як чотиривимірний гіперболоїд $\boldsymbol{H}^4$ в п'ятивимірному просторі $\boldsymbol{R}^{1,4}$ (простір де Сіттера). Як відомо, гіперболоїд $\boldsymbol{H}^4$ є однорідним простором групи де Сіттера $SO_0(1,4)$, що є групою поворотів простору $\boldsymbol{R}^{1,4}$. У зв'язку з побудовою квантової теорії поля на $\boldsymbol{H}^4$ природним чином виникає задача поділу фізичних полів в термінах функцій представлення класу на однорідному просторі $\boldsymbol{H}^4$ групи $SO_0(1,4)$, тобто задача визначення хвильової функції як поля на групі де Сіттера. Аналогічна задача для тривимірного гіперболоїда $\boldsymbol{H}^3$ та інших однорідних просторів групи Пуанкаре була поставлена і частково розв'язана головним чином в зв'язку з об'єднанням просторово-часових і внутрішніх симметрій елементарних частинок.

Дамо огляд групової теорії $SO(1,4)$. При розгляді будемо користуватись певними аналогіями між універсальними накриттями групи Лоренца та групи де Сіттера, встановленими Такахаші [1]. А саме, універсальним накриттям $SO(1,4)$ є спінорна група, яка в свою чергу накривається симплектичною групою: $Spin_+(1,4) \cong Sp(1,1)$. Група $Spin_+(1,4)$ описується в термінах кватерніонних матриць 2×2. З іншого боку, універсальне накриття групи Лоренца $SO(1,3)$ описується в термінах комплексних матриць 2×2. Ця аналогія дозволяє застосувати представлення Гельфанда–Неймарка [2,3] групи Лоренца.

П'ятивимірний простір де Сіттера є гомогенним до групи $SO(1,4)$, що складається з дійсних матриць 5–го порядку з одиничним детермінантом, які залишають інваріантною квадратичну форму

$$Q(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

Алгебра Лі $\mathfrak{so}(1,4)$ групи $SO(1,4)$ складається з дійсних матриць

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{01} & 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{02} & a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & 0 & -a_{34} \\ a_{04} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебра $\mathfrak{so}(1,4)$ містить базові елементи форми

$$L_{rs} = -e_{rs} + e_{sr}, \quad s, r = 1,2,3,4, \quad s < r, \qquad (1)$$

$$L_{0r} = e_{0r} + e_{r0}, \quad r = 1,2,3,4, \qquad (2)$$

де e_{rs} є матрицею з елементами $(e_{rs})_{pq} = \delta_{rp}\delta_{sq}$. Базові елементи (1) і (2) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[L_{MN}, L_{RS}] = \eta_{NR}L_{MS} + \eta_{MS}L_{NR} - \eta_{MR}L_{NS} - \eta_{NS}L_{MR}, \qquad (3)$$
$$R, M, N, S = 0,1,2,3,4,$$

де $\eta_{k0} = \eta_{0k} = \delta_{0k}$, $\eta_{ks} = -\delta_{ks}$; $k, s = 1,2,3,4$. $SO(1,4)$ є 10–параметричною групою.

Максимальна компактна підгрупа K групи $SO(1,4)$ ізоморфна групі $SO(4)$ і складається з матриць

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(4) \end{pmatrix}.$$

Для конструювання представлень групи $SO(1,4)$ використаємо розбиття Картана алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$ і розбиття Івасави групи $SO(1,4)$ [4]. В розбитті Картана $\mathfrak{so}(1,4) = \mathfrak{so}(4) + \mathfrak{p}$ підпростір $\mathfrak{p}$ складається з базових елементів (2). Група $SO(1,4)$ має дійсний ранг 1, тому комутативна підалгебра $\mathfrak{a}$ групи $\mathfrak{so}(1,4)$ є одновимірною. Оберемо матрицю L_{04} базовим елементом $\mathfrak{a}$. Отже, комутативна підгрупа A складається з матриць

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq \infty.$$

Використовуючи співвідношення (3) бачимо, що нільпотентна підалгебра $\mathfrak{n}$ алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$ визначається матрицями $L_{02} + L_{24}$, $L_{03} + L_{34}$ і $L_{01} + L_{14}$. Здійснивши експоненціальне накриття підалгебри $\mathfrak{n}$ на підгрупі N, знайдемо вигляд нільпотентної підгрупи N, що складається з матриць

$$\begin{pmatrix} 1 + (r^2 + s^2 + t^2)/2 & t & r & s & -(r^2 + s^2 + t^2) \\ t & 1 & 0 & 0 & -t \\ r & 0 & 1 & 0 & -r \\ s & 0 & 0 & 1 & -s \\ (r^2 + s^2 + t^2)/2 & t & r & s & 1 - (r^2 + s^2 + t^2) \end{pmatrix}.$$

Підгрупи K, A і N складають розбиття Івасави $SO(1,4) = SO(4) \cdot NA$. Відповідно до означення підгрупи M групи $SO(1,4)$, підгрупа M є ізоморфною до $SO(3)$. Отже, мінімальна параболічна підгрупа P описується розбиттям $P = SO(3) \cdot NA$. Оскільки ранг групи $SO(1,4)$ є одиничним, більше не існує параболічних підгруп, що містять P.

На групі $SO(1,4)$ існують два незалежні оператори Казиміра

$$F = L_{12}^2 + L_{13}^2 + L_{14}^2 + L_{23}^2 + L_{24}^2 + L_{34}^2 - L_{01}^2 - L_{02}^2 - L_{03}^2 - L_{04}^2,$$

$$W = (L_{12}L_{24} - L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23})^2 - (L_{12}L_{34} - L_{03}L_{24} + L_{04}L_{23})^2 - -(L_{01}L_{34} - L_{03}L_{14} + L_{04}L_{13})^2 - (L_{01}L_{24} - L_{02}L_{14} + L_{04}L_{12})^2 - -(L_{01}L_{23} - L_{02}L_{13} + L_{03}L_{12})^2.$$

Щоб розглядувані оператори були самоспряженими, запровадимо величини $J_{MN} = iL_{MN}$, використовуючи величини L_{MN} алгебри $\mathfrak{so}(1,4)$. В унітарному представленні

ЛІТЕРАТУРА:

1. Takahashi R. Sur les representations unitaries des groupes de Lorentz generalises. *Bull. Soc. math. France*. 1963. P. 289–433.
2. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М. : Наука. 1958. 368 с.
3. Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. М. : Физматгиз. 1958. 321 с.
4. Барут А., Рончка Р. Теория представления групп и ее приложения. М. : Наука. 1980. 396 с.
5. Волобуев И.П., Кубышин Ю.А. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля. М. : Эдиториал УРСС. 1998.
6. Varlamov V.V. C*PT Groups of Spinor Fields in de Sitter and Anti-de Sitter Space*s. *arXiv:1401.7723*. 2014. 31 с.
7. Тронин С.Н. Введение в теорию групп. Задачи и теоремы. Часть 1.: Учебное пособие. Казань : Казанский государственный университет, 2006. 100 с.
8. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1985. 144 с.

REFERENCES:

1. Takahashi, R. (1963) Sur les representations unitaries des groupes de Lorentz generalises. *Bull. Soc. math. France*. 289–433 [in French].
2. Gel'fand, I.M., Minlos, R.A., Shapiro, Z.Ya. (1963) *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*. Moscow: Science [in Russian].
3. Naimark, M.A. (1964) *Linear Representations of the Lorentz Group*. Moscow: Fizmatgiz [in Russian].
4. Barut, A., Ronchka, R. (1980) *Teoriya predstavleniya grupp i eye prilozheniya*. M.: Nauka [in Russian].
5. Volobuyev, I.P., Kubyshin, Yu.A. (1988) *Differentsialnaya geometriya i algebry Li i ikh prilozheniya v teorii polya*. M.: Editorial URSS [in Russian].
6. Varlamov, V.V. (2014) CPT Groups of Spinor Fields in de Sitter and Anti-de Sitter Spaces. *arXiv:1401.7723*. 31 [in English].
7. Tronin, S.N. (2006) *Vvedeniye v teoriyu grupp. Zadachi i teoremy. Chast 1.: Uchebnoye posobiye*. Kazan: Kazansky gosudarstvenny universitet [in Russian].
8. Vinberg, E.B. (1985) *Lineynye predstavleniya grupp*. M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury [in Russian].