

УДК 53:378.147

DOI <https://doi.org/10.32782/pet-2025-1-1>

Катерина ГЕРАСИМОВА

кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та фізики, Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, Дніпропетровська обл., Україна, 50027

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-8714-1006>

Бібліографічний опис статті: Герасимова, К. (2025). Апроксимація на лабораторних заняттях з фізики у технічних університетах. *Фізика та освітні технології*, 1, 3–9, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-1-1>

АПРОКСИМАЦІЯ НА ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТТЯХ З ФІЗИКИ У ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

У статті розглядаються методи апроксимації експериментальних даних при проведенні лабораторного практикуму з фізики у технічних університетах. Актуальність обраної теми пояснюється тим, що від вибору методу апроксимації залежить успішність і правильність визначення кількісних та якісних характеристик досліджуваних об'єктів. Проблема полягає у правильному виборі методу апроксимації для вирішення конкретних практичних завдань.

У роботі проведено огляд наукових публікацій і досліджень щодо обраної теми, наведено основні поняття і визначення теорії апроксимації. Дано означення двох типів апроксимації: строгої математичної і фізичної (технічної) апроксимації. Проаналізовано методи, конкретизовано та сформульовано вимоги, що висуваються до апроксимації експериментальних даних. Визначено загальне завдання апроксимації – правильний вибір апроксимуючої функції. Розкрито поняття згладжування кривої і методу найменших квадратів. Дано визначення видів апроксимації, що використовуються у комп'ютерній програмі MS Excel. Розглянуто можливість використання лінійної апроксимації методом найменших квадратів у фізичних дослідженнях. Наведено математичні формули, що стосуються цього методу. Вказано на особливості методики виконання лабораторних робіт за допомогою фізичної апроксимації для здобувачів-першокурсників, з урахуванням їх недостатньої базової математичної підготовки для виконання розрахунків. На конкретному прикладі показано застосування методу найменших квадратів, який використовується у лабораторному практикумі з фізики. Наведено відповідні розрахунки, визначено переваги і недоліки обраного методу, зроблено висновок щодо доцільності його застосування. Визначено напрямок подальшого дослідження інших видів апроксимації з метою їх ефективного впровадження у навчальний процес з фізики.

Ключові слова: апроксимація, фізика, експеримент, апроксимуюча функція, фізична модель, лабораторний практикум, метод найменших квадратів.

Kateryna HERASYMOVA

Candidate of Technical Sciences), Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Physics, Kryvyi Rih National University, 11 Vitaly Matusevich str., Kryvyi Rih, Dnipropetrovsk region, Ukraine, 50027

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-8714-1006>

To cite this article: Herasymova, K. (2025). Aproksymatsiya na laboratornykh zanyattakh z fizyky u tekhnichnykh universytetakh [Approximation in physics laboratory classes at technical universities]. *Physics and Educational Technology*, 2, 3–9, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-1-1>

APPROXIMATION IN PHYSICS LABORATORY CLASSES AT TECHNICAL UNIVERSITIES

The article discusses the methods of approximation of experimental data in the course of a laboratory practicum in physics at technical universities. The relevance of the chosen topic is explained by the fact that the choice of an approximation method determines the success and correctness of determining the quantitative and qualitative characteristics of the objects under study. The problem is to choose the right approximation method to solve specific practical problems.

The paper reviews scientific publications and studies on the chosen topic, provides the basic concepts and definitions of the approximation theory. Two types of approximation are defined: strict mathematical and physical (technical) approximation. The methods are analyzed, the requirements for approximation of experimental data are specified

and formulated. The general task of approximation is defined – the correct choice of the approximating function. The concepts of curve smoothing and the least squares method are revealed. The types of approximation used in the MS Excel computer programs are defined. The possibility of using linear approximation by the least squares method in physical research is considered. Mathematical formulas related to this method are presented. The peculiarities of the methodology for performing laboratory work using physical approximation for first-year students are indicated, taking into account their insufficient basic mathematical training to perform calculations. A specific example is used to demonstrate the application of the least squares method used in a physics laboratory workshop. The relevant calculations are presented, the advantages and disadvantages of the chosen method are determined, and a conclusion is made about the feasibility of its application. The direction of further research of other types of approximation for the purpose of their effective implementation in the educational process in physics is determined.

Key words: approximation, physics, experiment, approximating function, physical model, laboratory practicum, least squares method.

Актуальність проблеми. Фізика у технічних університетах вивчається з першого курсу. На лабораторних заняттях перед викладачем постають певні методичні труднощі, оскільки існує розрив між базовим рівнем математичної підготовки здобувачів і їх знаннями з вищої математики, необхідними для виконання лабораторних робіт. Для подолання цього розриву розробляються методичні вказівки, що містять короткий і доступний виклад теорії та інструкцію щодо виконання робіт. Для статистичної обробки даних викладач має навчити здобувачів користуватися можливостями сучасних комп'ютерних технологій (Іщенко, 2017).

Апроксимація – актуальна тема практично кожного експериментального дослідження. Опрацювання результатів, записаних у таблиці, часто виявляється незручним. Масив даних бажано подати у вигляді нескладних аналітичних залежностей, що відображають характер експериментальних залежностей. Для цього необхідно розв'язати завдання апроксимації, тобто замінити складну функцію, побудовану за експериментальними даними, наближеним аналітичним виразом. Проблема полягає у правильному виборі виду апроксимації для вирішення конкретних практичних завдань.

Аналіз досліджень і публікацій. На сьогодні сучасна вітчизняна наукова література із загальної теорії апроксимації, на жаль, представлена недостатньо.

Перелічимо деякі основні поняття та визначення щодо теми дослідження.

Апроксимація (від лат. *approximatio* – наближення) – «вираження одних математичних об'єктів іншими, близькими за значенням, але простішими за структурою. А. дає змогу дослідити числові характеристики і якісні властивості об'єкта за допомогою дослідження

простіших або зручніших об'єктів, характеристики яких відомі або їх простіше знайти» (Янченко, 2020, с. 58; Крилик, Богач & Прокопова, 2013, с. 86).

Наближення – те саме, що апроксимація. Прикладами апроксимації є наближене вираження кривих ліній ламаними, ірраціональних чисел – раціональними, довільних неперервних функцій многочленами тощо.

Інтерполяція (від лат. *inter* – між, *polio* – виправляю, полірую) – знаходження проміжних значень функції за відомими її дискретними значеннями. Інтерполяція є різновидом апроксимації, при якій крива побудованої функції має проходити через всі наявні точки даних.

Екстраполяція (від лат. *extra* – поза, зовні, *polio* – виправляю, полірую) – особливий тип апроксимації, при якому функція апроксимується поза заданим інтервалом, а не між відомими її заданими значеннями. Часто використовується для прогнозування, аналізу даних та візуалізації результатів дослідження (Чорний, Титюк, Істоміна & Власенко, 2016, с. 91).

Модель (від лат. *modus* – міра) – «спрощене уявлення про реальний об'єкт, процес або явище» (Мороз, 2002, с. 391). Моделлю може бути графік, схема, знакова система, структура тощо. Знання, отримані в результаті дослідження моделі, екстраполюються на оригінал та використовуються у науці.

Моделювання – «науковий метод прямого (опосередкованого) дослідження об'єктів через їх моделі, якщо безпосереднє вивчення об'єктів неможливе чи ускладнене» (Мороз, 2002, с. 392). Моделювання тісно взаємодіє з іншими науковими методами, зокрема експериментальними.

Адекватність (від лат. *adaequatus* – прирівняний, рівний) – відповідність, вірність, точність. Точність вимірювання – характеристика,

що відображає ступінь близькості результатів вимірювання до істинного значення вимірюваної величини.

При вивченні явища за допомогою його моделі важливо з'ясувати, чи відповідає модель експериментальним результатам у межах заданої точності спостережень. У зв'язку з цим необхідно перевірити адекватність моделі до властивостей реального об'єкта, причому точність моделі має бути більшою, ніж точність спостережень (тобто похибка моделі має бути меншою від похибки спостережень).

Апроксимацію умовно поділяють на строгу математичну і фізичну (технічну). Строга математична апроксимація – це фундаментальна теорія, що є підґрунтям фізичної апроксимації. Фізична апроксимація – модель фізичного явища, процесу, характеристик пристрою, параметрів сигналу, середовища, матерії тощо, є менш строгою, ніж математична теорія. Фізична апроксимація реалізується достатньою кількістю способів та апроксимуючих функцій, які обирають, виходячи з конкретно поставленого технічного завдання (Несмашний, Ткаченко & Герасимова, 2019).

Покажемо на прикладі формування теорії теплового випромінювання важливість апроксимації як фізичної, так і строгої математичної. Спочатку, на підставі експериментальних даних, були встановлені емпіричні закони випромінювання Стефана – Больцмана та закон зміщення Віна. Потім теоретично виведені та експериментально підтверджені для окремих випадків закони випромінювання Віна та Релея – Джинса. Згодом Планком була висунута квантова гіпотеза, що дала фундаментальний закон випромінювання – формулу Планка, яка блискуче узгоджується з експериментальними даними в усіх інтервалах частот і температур. Слід зазначити, що закони Стефана – Больцмана, Віна, Релея – Джинса є окремими проявами формули Планка (Лопатинський, Зачек, Ільчук & Романишин, 2009, с. 256-260).

Розглянуті дослідження – це не що інше, ніж *метод індукції* (від лат. *inductio* – наведення) – висновок, що поширюється від поодиноких фактів на деяке загальне твердження. Існує й інший, «конкуруючий» метод дослідження – *дедукція* (від лат. *deductio* – виведення). Посилками (початком) дедукції є загальні твердження,

наприклад, аксіоми, постулати або гіпотези («загальне»), а кінцем – наслідки з посилок, теореми («окреме»). Умовно кажучи, строга теорія математичної апроксимації є «загальним», а фізична апроксимація – «окремим».

Загальне завдання апроксимації – вибір апроксимуючої функції. Одним із методів апроксимації є *згладжування кривої*, яку намагаються провести так, щоб її відхилення від табличних даних було мінімальним. Як критерій оптимального згладжування часто використовують мінімум суми квадратів відхилень значень аналітичної функції, що задає апроксимуючу криву, від експериментальних значень. Цей відомий і ефективний метод апроксимації був запропонований німецьким математиком К.-Ф. Гаусом і називається *методом найменших квадратів* (Крилик, Богач & Прокопова, 2013, с. 87).

У комп'ютерній програмі MS Excel згладжування кривої виконується за допомогою побудови *лінії тренду* і використовуються такі *види апроксимації*:

1) *лінійна* (Linear) – застосовуються, коли швидкість зміни експериментальних даних відносно постійна;

2) *логарифмічна* (Logarithmic) – описує експериментальні дані, які спочатку стрімко зростають (убувають), а потім поступово стабілізуються;

3) *поліноміальна* (Polynomial) – описує знакозмінні зростаючі і спадні експериментальні дані;

4) *степенна* (Power) – застосовуються, коли швидкість зміни експериментальних даних постійно зростає (зменшується);

5) *експоненціальна* (Exponential) – використовується для опису експериментальних даних, швидкість зростання (зменшення) яких безупинно зростає;

6) *лінійна фільтрація* (Moving average) – використовується як середнє значення до наближення, дозволяє згладити коливання даних і показати характер залежності.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо лінійну апроксимацію у фізичних експериментальних дослідженнях. Дослідні залежності між фізичними величинами, як правило, нелінійні. Однак, багато з них можна лінеаризувати, тобто представити у вигляді лінійних.

Нехай отримано n залежностей між двома фізичними величинами x та y . Кожній парі (x_i, y_i) цих величин відповідає i -та точка на координатній площині XOY . Будуємо ці точки. Таким чином, на площині маємо множину n точок. Далі знаходимо лінійну аналітичну функцію $y = f(x)$, яка б «найкращим чином» описувала цю множину точок. У реальних умовах досліду всі експериментальні точки «не лягають» на пряму. Причиною таких відхилень можуть бути похибки вимірювань, невисока точність вимірювальних приладів, суб'єктивні чинники тощо. Пряму, яка найменше відхиляється від експериментальних точок, зручно побудувати за допомогою *методу найменших квадратів* (Лісікова & Цибульник, 2017).

Припускаємо, що між x і y існує лінійна залежність виду $y = kx + b$, де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, що дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатного напрямку осі OX , b – відстань від початку координат до точки перетину прямої з віссю OY . Лінійна залежність зумовлена двовірним нормальним законом розподілу пар випадкових величин (x_i, y_i) . Для побудови графіку треба обчислити k і b .

Наближення функції $y = f(x)$ до експериментальної залежності вважається найкращим, якщо виконується умова мінімуму суми квадратів відхилень аналітичної функції від експериментальної залежності, тобто щоб вираз $\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min$. У математиці строго доведено, що вираз аналітичної функції має задовольняти систему так званих *нормальних рівнянь*:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = k \sum_{i=1}^n x_i + bn; \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i, \end{cases} \quad (1)$$

де n – кількість експериментальних точок (Клепко & Голець, 2009, с. 358).

Розв'язують систему (1), обчислюють значення k і b . Ці ж величини можна визначити за іншими робочими формулами, які виводять із (1):

$$\begin{aligned} k &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Як бачимо, метод найменших квадратів потребує громіздких обчислень. Однак безумовною перевагою цього методу є висока точність наближення апроксимуючої функції до реальної експериментальної залежності.

Даний метод апроксимації розглянемо на прикладі лабораторної роботи «Вивчення температурної залежності опору металевих провідників». Мета роботи – вивчити температурну залежність опору металів і визначити температурний коефіцієнт опору вольфраму.

Відомо, що електричний опір речовин залежить від температури. Залежність опору металів R від температури t вважається лінійною:

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (3)$$

де α – температурний коефіцієнт опору, що характеризує приріст опору при збільшенні температури на один градус; R_0 – опір при температурі 0°C .

У лабораторній роботі вимірюють опір вольфрамового провідника при його нагріванні. Дослідні дані наведені у таблиці 1.

Досліди показують, що при збільшенні температури опір збільшується. Якщо побудувати експериментальні точки (рис. 1), то можна припустити, що між змінними R і t існує деяка лінійна аналітична залежність

$$R = kt + b. \quad (4)$$

Для визначення цієї залежності проводимо додаткові розрахунки, які разом з експериментальними даними заносимо до таблиці 2. Правильність усіх розрахунків можна перевірити,

Таблиця 1

Експериментальні залежності електричного опору від температури

№	1	2	3	4	5	6	7	8
$t, ^\circ\text{C}$	20,2	24,3	28,5	32,2	36,5	40,1	44,2	47,9
$R, \text{Ом}$	86,3	87,1	88,7	89,7	91,8	93,2	94,9	96,4

Таблиця 2

Результати експерименту і розрахунків

№	1	2	3	4	5	6	7	8	Сума
$t, ^\circ C$	20,2	24,3	28,5	32,2	36,5	40,1	44,2	47,9	273,9
$R, Ом$	86,3	87,1	88,7	89,7	91,8	93,2	94,9	96,4	728,1
$R \cdot t$	1743,26	2116,53	2527,95	2888,34	2888,34	3737,32	4194,58	4617,56	25176,24
R^2	7447,69	7586,41	7867,69	8046,09	8427,24	8686,24	9006,01	9292,96	66360,33
t^2	408,04	590,49	812,25	1036,84	1332,25	1608,01	1953,64	2294,41	10035,93
$R_{розр}, Ом$	85,73	87,28	88,86	90,26	91,88	93,24	94,78	96,18	728,21

порівнюючи суми значень експериментального і розрахункового опорів.

За формулами (2) обчислюємо значення k і b :

$$k = \frac{8 \cdot 25176,24 - 273,9 \cdot 728,1}{8 \cdot 10035,93 - (273,9)^2} = 0,3766; \quad (5)$$

$$b = \frac{10035,93 \cdot 728,1 - 273,9 \cdot 25176,24}{8 \cdot 10035,93 - (273,9)^2} = 78,118.$$

Підставимо ці значення в (4) і запишемо аналітичну залежність між R і t :

$$R = 0,3766t + 78,118. \quad (6)$$

Підставимо у (6) значення температур з таблиці 2, одержимо розрахункові значення опорів $R_{розр}$, які також заносимо до таблиці 2. За значеннями розрахункових опорів і відповідними до них температурами будуємо *лінію регресії*, тобто пряму, від якої всі експериментальні точки відхиляються якнайменше (Косуліна, 2020).

Побудову експериментальних точок і лінії регресії зручно виконувати у комп'ютерній програмі MS Excel (рис. 1).

Екстраполюємо лінію регресії до перетину з віссю R (рис. 2). Визначаємо температурний коефіцієнт опору α за формулою:

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_0(t_2 - t_1)}, \quad (7)$$

де R_0 – точка перетину прямої з віссю OY , визначає опір провідника при $t = 0 ^\circ C$, її значення з точністю до тисячних співпадає обчисленим раніше параметром $b = R_0 = 78,118$ ($\square <$); R_1, R_2, t_1, t_2 – координати двох довільно взятих точок 1 і 2 на графіку (рис. 2).

$$\alpha = \frac{91,3 - 83,8}{78,118(35 - 15)} = 0,0048 (^\circ C^{-1}). \quad (8)$$

Отримане значення α порівнюємо з відомим табличним значенням α_t температурного коефіцієнту опору вольфраму ($\alpha_t = 0,0046 ^\circ C^{-1}$). Обчислюємо відносну похибку визначення α :

$$\delta = \frac{|\alpha_t - \alpha|}{\alpha_t} \cdot 100\% = \frac{|0,0046 - 0,0048|}{0,0046} \cdot 100\% = 4,34\%. \quad (9)$$

Отримана похибка є незначною, тобто експериментальний результат добре узгоджується

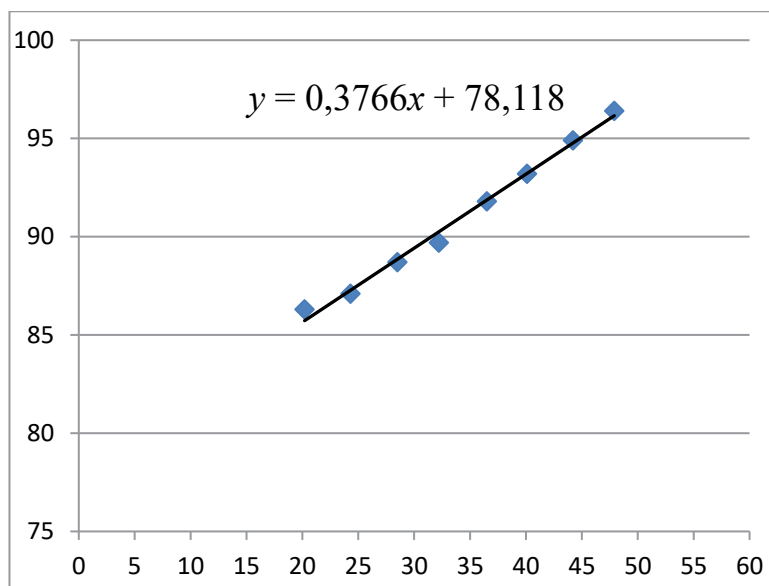


Рис. 1. Експериментальні точки і лінія регресії

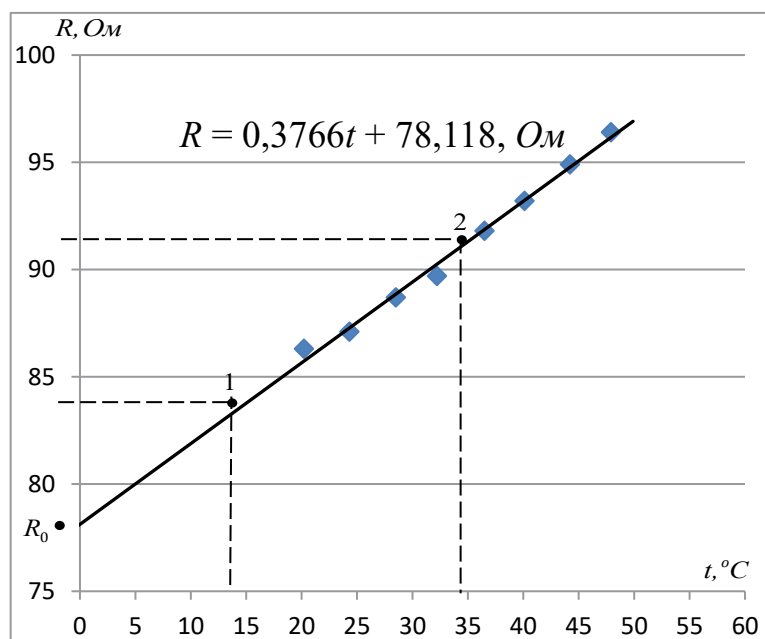


Рис. 2. Графічне визначення температурного коефіцієнту опору

з теоретичним значенням коефіцієнту опору вольфраму.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Апроксимуючі функції мають якомога точно описувати характеристики реальних процесів. Установлено, що підвищення точності апроксимації часто призводить до ускладнення апроксимуючих функцій, що в свою чергу ускладнює аналіз процесів. Тому під час розв'язання задачі апроксимації так, як і при розв'язанні будь-якої задачі, пов'язаної з вибором моделі, необхідно обирати між точністю і складністю моделі.

Розглянутий метод найменших квадратів, хоч і вимагає громіздких обчислень, забезпечує найменше відхилення апроксимуючої функції від вихідної функції, тому його доцільно застосовувати, коли необхідна висока точність апроксимації. У цьому ми переконались на прикладі застосування методу лінійної апроксимації у лабораторній роботі з фізики.

У подальшому ми плануємо досліджувати інші види апроксимації, такі як логарифмічна чи експоненціальна, з метою їх ефективного впровадження у навчальний процес.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Іщенко Р. М. Викладання фізики в технічних університетах України на сучасному етапі. *Вісник Національного транспортного університету*. Київ: НТУ, 2017. № 1. С. 147–153.
2. Янченко С.Я. Апроксимація. Велика українська енциклопедія. URL: <https://vue.gov.ua/Апроксимація> (дата звернення: 13.02.2025).
3. Крилик Л. В., Богач І. В., Прокопова М. О. Навчальна математика. Інтерполяція та апроксимація табличних даних: навч. посіб. Вінниця: ВНТУ, 2013. 111 с.
4. Чорний О. П., Титюк В. К., Істоміна Н. М., Власенко В.А. Математичні методи моделювання: навч. посіб. Кременчук: ПП Щербатих О. В., 2016. 234 с.
5. Мороз О. Модель, моделювання. *Філософський енциклопедичний словник* / В. І. Шинкарук (гол. редкол.) та ін. Київ: Абрис, 2002. С. 391–392.
6. Несмашний Є.О., Ткаченко Г.І., Герасимова К.В. Використання чисельних методів моделювання фізичних процесів у закладах вищої освіти. *Вісник Криворізького національного університету*. Кривий Ріг, 2019. № 48. С. 88–94. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vktu_2019_48_19
7. Лопатинський І.Є., Зачек І.Р., Ільчук Г. А., Романишин Б. М. Фізика для інженерів: підр. Львів: Львівська політехніка, 2009. 385 с.
8. Лисікова К.О., Цибульник С.О., Апроксимація функцій методом найменших квадратів / *Вісник інженерної академії України*. Київ, 2017. № 1. С. 106–110.
9. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.

10. Косуліна Н. Г. Метод найменших квадратів: навч.-метод. посіб. Харків: ХНТУСГ, 2020. 25 с.

REFERENCES:

1. Ishchenko, R. M. (2017). Vykladannia fizyky v tekhnichnykh universytetakh Ukrainy na suchasnomu etapi [Teaching physics in technical universities of Ukraine at the modern stage]. *Visnyk Natsionalnoho transportnoho universytetu – Bulletin of the National Transport University*, 1, 147–153. [in Ukrainian].
2. Yanchenko, S. Ya. Approximation. Velyka ukrayinska entsyklopediya [Great Ukrainian Encyclopedia]. Retrieved from <https://vue.gov.ua/Апроксимація> [in Ukrainian].
3. Krylyk, L. V., Bohach, I. V., & Prokopova, M. O. (2013). Navchalna matematyka. Interpolyatsiya ta aproksymatsiya tablychnykh danykh [Educational mathematics. Interpolation and approximation of tabular data]. VNTU, 111. [in Ukrainian].
4. Chorny, O.P., Tytyuk, V. K., Istomina, N. M. & Vlasenko, V. A. (2016). Matematychni metody modelyuvannya [Mathematical modeling methods]. PP Shcherbatykh O. V., 234. [in Ukrainian].
5. Moroz, O. (2002). Model, modelyuvannya. *Filosofskyi entsyklopedychnyi slovnyk* / V. I. Shynkaruk (hol. redkol.) ta in. [Model, modeling. In V. I. Shynkaruk (Ed.), *Philosophical encyclopedic dictionary*]. Abris, 391–392. [in Ukrainian].
6. Nesmashnyy, Ye.O., Tkachenko, H.I. & Herasymova, K.V. (2019). Vykorystannya chyselnykh metodiv modelyuvannya fizychnykh protsesiv u zakladakh vyshchoyi osvity [Application of numerical methods for modeling physical processes in higher education institutions.]. *Visnyk Kryvoriz'koho natsional'noho universytetu – Bulletin of Kryvyi Rih National University*, 48, 88–94. Retrieved from http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vktu_2019_48_19 [in Ukrainian].
7. Lopatynskyi, I. Ie., Zachek, I.R., Ilchuk, H. A. & Romanyshyn, B. M. (2009). Fizyka dlia inzheneriv [Physics for engineers]. Lvivska politehnika, 385. [in Ukrainian].
8. Lysikova, K.O. & Tsybulnyk, S.O. (2017) Aproksymatsiya funktsiy metodom naymenshykh kvadrativ [Approximation of functions by the method of least squares] / *Visnyk inzhenernoyi akademiyi Ukrayiny – Bulletin of the Engineering Academy of Ukraine*, 1, 106–110. [in Ukrainian].
9. Klepko, V. Yu., & Holets, V. L. (2009). Vyshcha matematyka v prykladakh i zadachakh [Higher mathematics in examples and problems]. *Tsentr uchbovoyi literatury – Center of Educational Literature*, 594. [in Ukrainian].
10. Kosulina N. H. (2020). Metod naymenshykh kvadrativ [The method of least squares]. KhNTUSH, 25. [in Ukrainian].