

УДК 538.945

DOI <https://doi.org/10.32782/pet-2025-1-10>

Павло САХНЮК

аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025
ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-4422-6082>

Оксана ЗАМУРУЄВА

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0032-0613>
SCOPUS AUTHOR ID: 56181742100

Бібліографічний опис статті: Сахнюк, П., Замуруєва, О. (2025). Магнітні властивості джозефсонівських контактів з другою гармонікою в струм-фазовій залежності. *Фізика та освітні технології*, 1, 76–82, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-1-10>

МАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КОНТАКТІВ З ДРУГОЮ ГАРМОНІКОЮ В СТРУМ-ФАЗОВІЙ ЗАЛЕЖНОСТІ

Проведене дослідження присвячене актуальній проблемі фізики надпровідності, а саме вивченню струмових станів у надпровідних контактах, які демонструють відхилення від стандартної синусоїдної залежності струму від різниці фаз. Ця проблема є предметом інтенсивних наукових досліджень як з фундаментальної точки зору, так і з прикладної, оскільки несинусоїдна залежність може суттєво впливати на характеристики джозефсонівських контактів, що використовуються в різноманітних технологічних застосуваннях.

Основна мета дослідження полягає у встановленні кількісного впливу зовнішнього магнітного поля на струм-фазову залежність та критичний струм таких контактів з урахуванням наявності другої гармоніки.

Виконано аналітичне дослідження впливу параметра ангармонічності α на критичний струм контакту за відсутності зовнішнього магнітного поля. Показано, що зі збільшенням параметра ангармонічності критичний струм зростає, причому ця залежність є квадратичною при малих значеннях α та наближається до лінійної при великих значеннях α .

Одержано залежність критичного струму контакту від величини магнітного потоку та параметра ангармонічності α . Результати дослідження представлені у вигляді графіків залежності повного струму від різниці фаз при різних значеннях магнітного потоку, залежності фази, при якій досягається максимум струму, від магнітного потоку, а також залежності критичного струму від магнітного потоку для різних значень параметра ангармонічності α . Встановлено, що зі збільшенням параметра ангармонічності α критичний струм стає більш чутливим до дії зовнішнього магнітного поля, особливо в області малих значень магнітного потоку. Це проявляється у більш швидкому зменшенні критичного струму зі збільшенням магнітного поля для контактів з ненульовим значенням α порівняно з контактами, що мають чисто синусоїдну струм-фазову залежність.

Ключові слова: надпровідний контакт, струм-фазова залежність, критичний струм, магнітний потік.

Pavlo SAKHNIUK

Postgraduate Student at the A. V. Svidzynsky Department of Theoretical and Computer Physics, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Ukraine, 43025
ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0001-4422-6082>

Oksana ZAMURUEVA

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Physics named by A. V. Svidzynskyi, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Ukraine, 43025
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0032-0613>
SCOPUS AUTHOR ID: 56181742100

To cite this article: Sakhniuk, P., Zamuruieva, O. (2025). Mahnitni vlastyivosti dzhozefsonivskykh kontaktiv z druhoiu harmonikoio v strum-fazovii zalezhnosti [Magnetic properties of Josephson junctions with a second harmonic in the current-phase relationship]. *Physics and Educational Technology*, 1, 76–82, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-1-10>

MAGNETIC PROPERTIES OF JOSEPHSON JUNCTIONS WITH A SECOND HARMONIC IN THE CURRENT-PHASE RELATIONSHIP

The conducted research is devoted to a relevant problem in superconductivity physics, namely the study of current states in superconducting junctions that exhibit deviations from the standard sinusoidal current-phase relationship. This problem is a subject of intensive scientific research from both fundamental and applied perspectives, as the non-sinusoidal dependence can significantly affect the characteristics of Josephson junctions used in various technological applications.

The main goal of the research is to establish the quantitative impact of an external magnetic field on the current-phase relationship and critical current of such junctions, considering the presence of a second harmonic.

An analytical study of the influence of the anharmonicity parameter α on the critical current of the junction in the absence of an external magnetic field was performed. It was shown that with an increase in the anharmonicity parameter, the critical current increases, and this dependence is quadratic at small values of α and approaches linear at large values.

The dependence of the junction's critical current on the magnetic flux magnitude and the anharmonicity parameter α was obtained. The research results are presented as graphs of the total current versus the phase difference at different magnetic flux values, the phase at which the current maximum is achieved versus the magnetic flux, and the critical current versus the magnetic flux for different values of the anharmonicity parameter α . It was established that with an increase in the anharmonicity parameter α , the critical current becomes more sensitive to the action of an external magnetic field, especially in the region of small magnetic flux values. This manifests as a faster decrease in the critical current with an increase in the magnetic field for junctions with a non-zero value of α compared to junctions with a purely sinusoidal current-phase relationship.

Key words: superconducting junction, current-phase relation, critical current, magnetic flux.

Вступ. Дослідження струмових станів у надпровідних контактах різного типу невпинно розвиваються та набувають дедалі більшого інтересу як у фундаментальному аспекті так і з боку інженерії у практичній площині (див. огляд (Golubov, 2004, р. 411)). Ключовим питанням теоретичних досліджень фізики надпровідних контактів є залежність струму від різниці фаз. Існує ціла низка факторів, що суттєво впливають на форму цієї залежності. У багатьох випадках врахування цих факторів приводить до відхилення струм-фазової залежності від простої синусоїдної (Sakhniuk, 2017; Сахнюк, 2011).

Якщо вважати коефіцієнт проходження електронів малим, як це припускається в багатьох дослідженнях (Golubov, 2004, р. 411), то величина надпровідного струму, що протікає через контакт буде малою. Ця обставина дозволяє знехтувати впливом струму на просторову поведінку параметра впорядкування і відкинути доданком з надплинною швидкістю у рівнянні Гінзбурга-Ландау (Свідзинський, 2011), якщо говорити про надпровідні контакти для температур, близьких до критичної. При дослідженні струм-фазової залежності без додаткових умов на коефіцієнт проходження електронів

необхідно враховувати ефекти розпаровування, оскільки для немалих значень коефіцієнта прозорості величина струму наближається до термодинамічного критичного. Врахування ефекту розпаровування полягає у збереженні доданку з надплинною швидкістю у рівнянні Гінзбурга-Ландау, що зрештою відобразиться на формі залежності струму від різниці фаз та інших важливих, як в фундаментальному, так і прикладному аспектах, характеристиках надпровідних контактів. Для певного інтервалу зміни значень коефіцієнта проходження електронів це приводитиме до появи додаткового доданка із синусом подвоєної фази, кажуть з'являється друга гармоніка. Якщо ж коефіцієнт проходження електронів наближається до одиниці, то струм-фазова залежність стає ще складнішою.

Поблизу границі, внаслідок умови самоузгодженості, параметр впорядкування менший ніж в глибині надпровідника. В результаті, із збільшенням струму, ефекти розпаровування проявляються суттєвіше саме в цій області.

Мета роботи. Дослідження впливу магнітного поля на залежність струму від різниці фаз та критичний струм в тунельних

джозефсонівських контактах з другою гармонікою в струм-фазовій залежності.

Модель та основні рівняння. В роботі досліджуються тунельні надпровідні контакти, утворені двома надпровідниками розділеними тонким прошарком діелектрика. Анггармонічність струм-фазової залежності в таких контактах на основі високотемпературних надпровідників та надпровідників на основі заліза пов'язана з d-хвильовою поведінкою параметра впорядкування (Tsuei, 2000). У контактах на основі звичайних низькотемпературних надпровідників при температурах, близьких до критичної, анггармонічність з'являється зі збільшенням коефіцієнта проходження електронів (Sakhnyuk, 2017; Сахнюк, 2011).

В нашому дослідженні розглядається анггармонічність в найпростішому вигляді, що математично виражається у включенні доданку з другою гармонікою в формулу для залежності струму від різниці фаз (Tsuei, 2000)

$$j(\varphi) = j_{co}(\sin\varphi + \alpha \sin 2\varphi), \quad (1)$$

де j_{co} – критичний струм контакту за відсутності другої гармоніки. Параметр анггармонічності α залежить від технології підготовки контакту.

Знайдемо критичний струм контакту при даній струм-фазовій залежності. Диференціюючи (1) по φ одержимо:

$$\frac{dj(\varphi)}{d\varphi} = j_{co}(\cos\varphi + 2\alpha \cos 2\varphi) = 0,$$

або

$$4\alpha \cos^2\varphi + \cos\varphi - 2\alpha = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння знайдемо різницю фаз, при якій густина струму в контакті досягає максимального значення:

$$\cos\varphi_c = \frac{-1 + \sqrt{1 + 32\alpha^2}}{8\alpha}. \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1) знаходимо критичний струм контакту, як функцію параметра анггармонічності α :

$$j_c(\alpha) = j_{co} \frac{1}{32\alpha} \sqrt{(\sqrt{1 + 32\alpha^2} + 1)^2 - 4(3 + \sqrt{1 + 32\alpha^2})}. \quad (3)$$

На Рис. 1 побудовано графік, який відображає вплив параметра анггармонічності α в струм-фазовій залежності на критичний струм контакту. Як видно зі збільшенням α критичний

струм зростає і досить швидко апроксимується лінійною залежністю. Те, що зі збільшенням α залежність критичного струму від параметра α наближається до лінійної можна також переко-
нати і безпосередньо на основі формули (3), асимптотой графіка якої є функція

$$j_c^{as}(\alpha) = j_{co} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha \right).$$

Для асимптотичного випадку $\alpha \rightarrow 0$ одержуємо

$$j_c(0) = j_{co}(1 + 2\alpha^2),$$

тобто залежність від параметра анггармонічності є квадратичною.

Знайдемо явний вигляд параметра анггармонічності у формулі (1) для тунельного джозефсонівського контакту SIS при температурах, близьких до критичної. Для цього скористаємося формулою для залежності струму від різниці фаз в таких контактах з врахуванням ефектів розпаровування (Sakhnyuk, 2017; Сахнюк, 2011)

$$I_s = I_c \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin\varphi}{1 - \varepsilon \cos\varphi}. \quad (4)$$

Тут ε – безрозмірний параметр:

$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2}}$, в якому $\tau = \sqrt{\frac{12}{7\zeta(3)}} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$, $\zeta(3)$ – зета функція Рімана, T – температура, T_c – критична температура, I_c – критичний струм контакту;

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{56\zeta(3)} \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \left[1 + \frac{1-D}{D} \ln(1-D) \right] + \frac{42\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{1}{D} - 1 \right)^3 \times \frac{\left\{ \sqrt{\frac{D}{1-D}} - \arctan \sqrt{\frac{D}{1-D}} \right\}^2}{1 + \frac{1-D}{D} \ln(1-D)},$$

D – коефіцієнт проходження електронів крізь контакт.

Для малих ε у формулі (4) можна виконати розклад в ряд Тейлора. Тоді, зберігаючи доданки не вище першого степеня ε , одержимо

$$I_s \approx \sin\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\varphi.$$

Параметр ε є малим при малих значеннях коефіцієнта проходження електронів. Графік залежності ε від коефіцієнта проходження електронів D подано на Рис. 1 в (Shutovskiy,

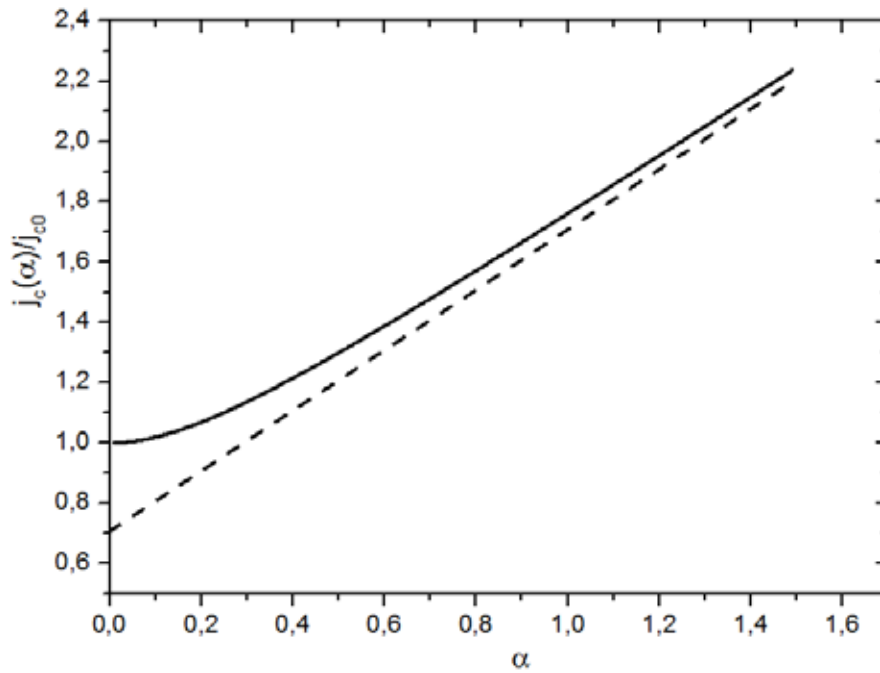


Рис. 1. Залежність густини критичного струму контакту від параметра α .

Пунктирна пряма є асимптотою $\frac{j_c^{as}(\alpha)}{j_{c0}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha \right)$

2022). Для коефіцієнта проходження електронів $D=0,053$ та температури $T=0,98T_c$ маємо $\varepsilon=0,2$.

Вплив магнітного поля на протікання струму в надпровідних контактах з другою гармонікою в струм-фазовій залежності

З'ясуємо, як наявність другої гармоніки відобразиться на поведінці джозефсонівського контакту в магнітному полі та одержимо залежність критичного струму від величини потоку магнітного поля, яке пронизує надпровідний контакт.

Вважатимемо, що зовнішнє магнітне поле прикладене паралельно до площини контакту, а систему координат виберемо так, щоб вектор напруженості магнітного поля збігався за напрямом з віссю $Oy: \vec{H} = (0, H, 0)$. Струм протікає вздовж осі $Oz: \vec{j} = (0, 0, j)$.

У випадку геометрії контакту, зображеного на Рис. 1 різниця фаз залежатиме від координати x (Сахнюк, 2013):

$$\varphi \rightarrow 2edHx + \varphi, \quad (5)$$

де e – заряд електрона, d – товщина області навколо прошарку діелектрика, в яку проникає магнітне поле.

Підставляючи (5) у вираз для густини струму (1) одержимо залежність густини струму від координати вздовж контакту

$$j(H, x, \varphi) = j_{c0} [\sin(2edHx + \varphi) + \alpha \sin(4edHx + 2\varphi)].$$

Для знаходження повного струму, що протікає через контакт необхідно проінтегрувати останню формулу по площі контакту

$$I(H, \varphi) = \int_0^l dx \int_0^1 dy j_{c0} [\sin(2edHx + \varphi) + \alpha \sin(4edHx + 2\varphi)] =$$

$$= j_{c0} \left[\frac{\sin(edHl) \cdot \sin(edHl + \varphi)}{edH} + \alpha \frac{\sin(2edHl) \cdot \sin(2edHl + 2\varphi)}{2edH} \right]. \quad (6)$$

Використовуючи позначення для повного потоку магнітного поля через контакт $\Phi = Hld$

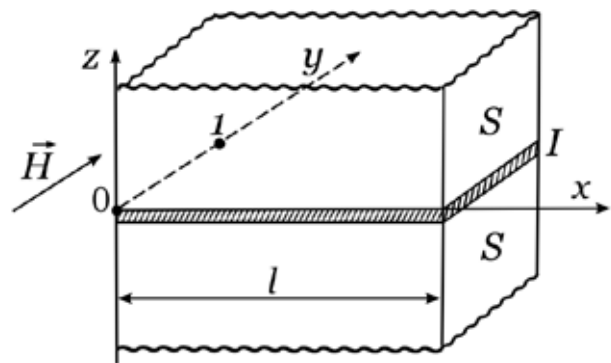


Рис. 2. Схематичне зображення досліджуваного в роботі джозефсонівського тунельного надпровідного контакту (Сахнюк, 2013)

та критичного струму за відсутності магнітного поля $I_{co} = j_{co} l$ після виконання інтегрування в (6) одержимо

$$I(H, \varphi) = I_{co} \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}} \left[\sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi\right) + \alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} + 2\varphi\right) \right]. \quad (7)$$

Залежність струму, що протікає через контакт від різниці фаз при різних значеннях магнітного потоку в інтервалі від нуля до значень близьких кванту магнітного потоку зображено на Рис. 3. Зі збільшенням величини магнітного потоку амплітуда струму зменшується, а різниця фаз, при якій струм досягає максимуму зміщується в напрямку нуля.

Для знаходження критичного струму контакту, як функції магнітного потоку необхідно обчислити від (7) похідну по φ . Далі, покладаючи одержану похідну рівною нулеві, знайти значення різниці фаз, при якому струм в контакті досягає максимуму.

Обчислюючи від (7) похідну по φ та прирівнюючи її до нуля одержимо

$$4\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_c\right) + \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_c\right) - 2\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) = 0.$$

Розв'язок цього рівняння:

$$\cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0} + \varphi_c\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 32\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}}{8\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}. \quad (8)$$

Підставляючи (8) в (7) одержимо залежність критичного струму контакту від магнітного потоку:

$$I_c(\Phi) = I_{co} \frac{3 + \sqrt{1 + 32\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)}}{32\alpha \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)} \left[\sqrt{1 + 32\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Розглядаючи в останньому результаті асимптотичний випадок $\alpha \rightarrow 0$, що означатиме відкрити у виразі для струму доданок, пов'язаний з ангармонічністю, легко відтворимо формулу залежності критичного струму від магнітного потоку для синусоїдної залежності струму від різниці фаз (Свідзинський, 2011).

За відсутності магнітного поля максимум струму в контакті досягається при різниці фаз $\varphi_c \approx 1,1 \text{ рад}$, зі збільшенням магнітного потоку φ_c зменшується за близьким до лінійного законом, однак при наближенні до половини кванту магнітного потоку ця залежність ускладнюється, а зменшення фази сповільнюється.

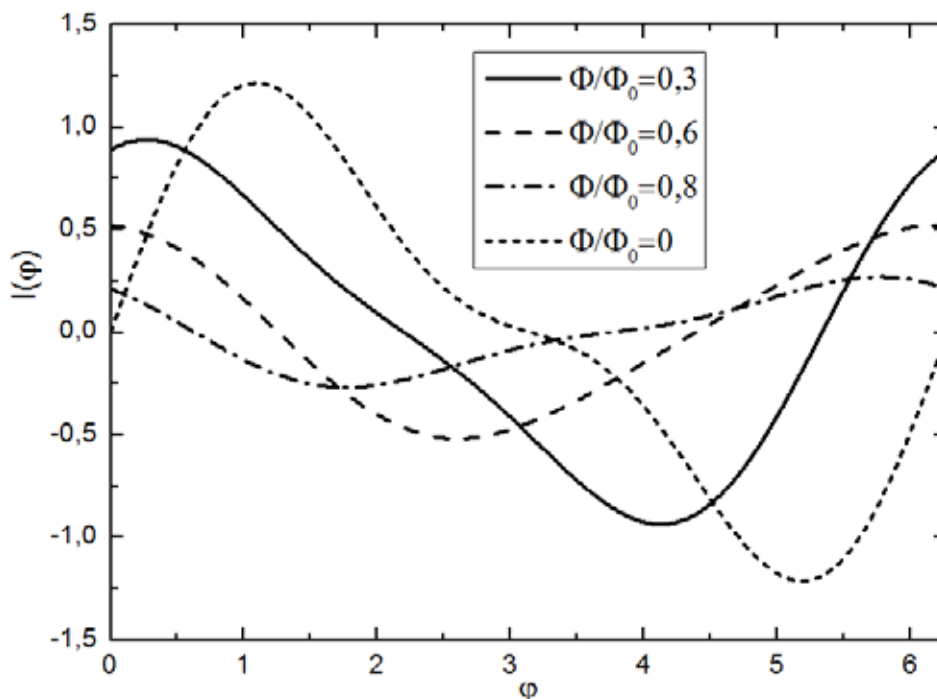


Рис. 3. Залежність повного струму через контакт від різниці фаз при різних значеннях потоку магнітного поля

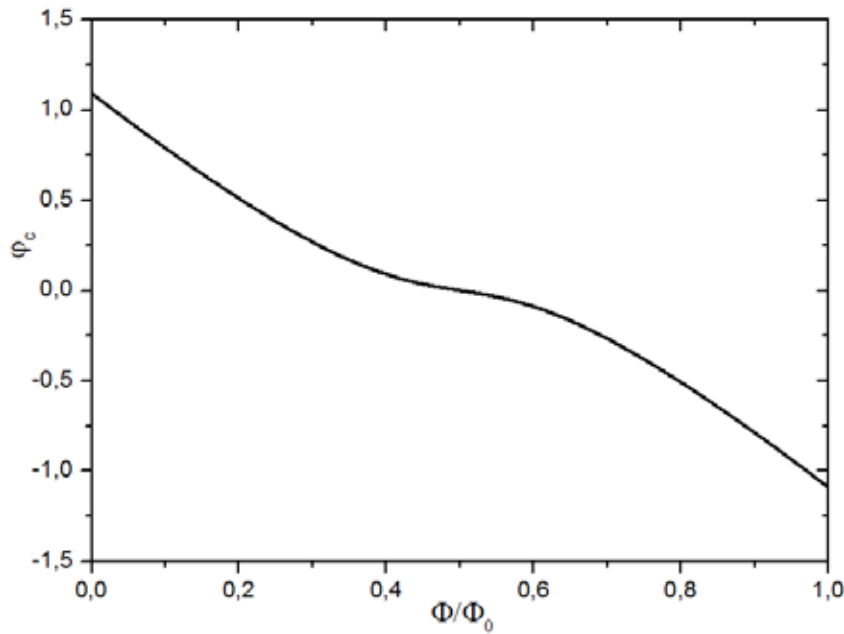


Рис. 4. Залежність значення різниці фаз, при якому струм в контакті досягає максимуму, від потоку магнітного поля

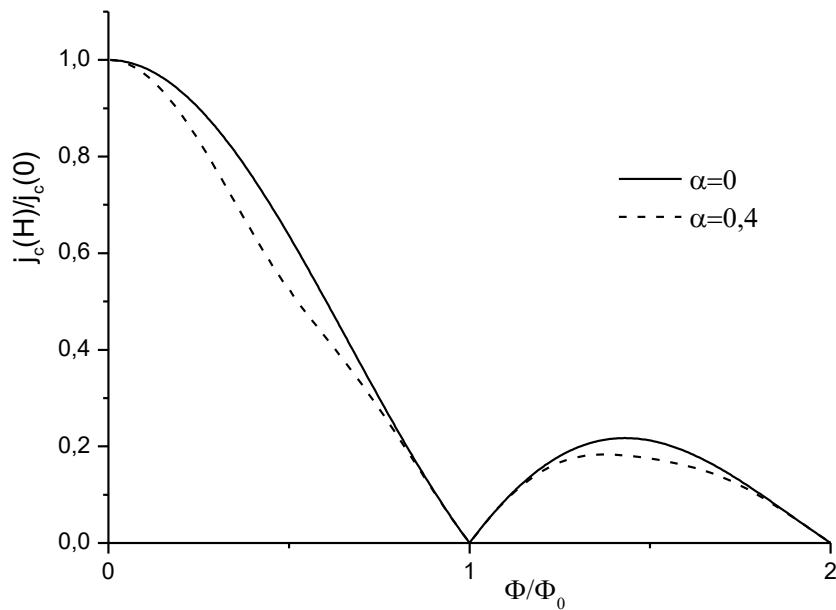


Рис. 5. Залежність критичного струму контакту від магнітного потоку. Суцільна лінія для синусоїдної залежності, пунктирна для ангармонійної (1)

З графіків, зображених на Рис. 5, можемо зробити висновок щодо впливу ангармонійності на залежність критичного струму контакту від магнітного потоку: зі збільшенням параметра α критичний струм є більш чутливим до появи зовнішнього магнітного поля. Особливо це добре видно в околі нуля: зі збільшенням магнітного потоку критичний струм швидше зменшується для випадку відмінного

від нуля α . Ця обставина є корисною в плані практичного використання таких контактів у детекторах магнітних полів.

Висновки. Встановлено, що наявність другої гармоніки, яка характеризується параметром α , призводить до збільшення критичного струму контакту. Ця залежність є квадратичною при малих значеннях α та наближається до лінійної при великих значеннях. Отримано

аналітичні вирази для критичного струму як функції параметра ангармонічності, що дозволяє кількісно оцінити цей вплив.

Досліджено вплив зовнішнього магнітного поля, прикладеного паралельно площині контакту, на струмові характеристики. Отримано вираз для повного струму через контакт як функції різниці фаз та магнітного потоку. Ключовим результатом є виявлення підвищеної чутливості критичного струму до зовнішнього магнітного поля зі збільшенням параметра ангармонічності α . Особливо це проявляється в області малих

значень магнітного потоку, де критичний струм зменшується швидше для контактів з ненульовим α порівняно з контактами з чисто синусоїдною струм-фазовою залежністю.

Таким чином, проведене дослідження розширює розуміння поведінки джозефсонівських контактів з несинусоїдною струм-фазовою залежністю в магнітному полі. Отримані результати мають важливе значення як для фундаментальної фізики надпровідності, так і для розвитку прикладних надпровідних пристроїв, зокрема чутливих магнітних сенсорів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Golubov A.A., Kupriyanov M. Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions. *Rev. Mod. Phys.* 2004. Vol. 6, p. 411. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.411>.
2. Sakhnyuk V. E., Pastukh O. Yu., Shutowskii A. M. The effects of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration. *Low Temperature Physics*. 2017. Vol. 43. № 6. P. 664-669. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4985972>.
3. Сахнюк В. Є., Головій В. М. Вплив прозорості діелектричного прошарку на форму залежності струму від різниці фаз у контактах типу SIS. *Журнал фізичних досліджень*, 2011, Т. 15, Ч. 2, С. 2702–8. DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.15.2702>.
4. Свідзинський А.В. Мікроскопічна теорія надпровідності : монографія. Луцьк : Волин. нац ун-т ім. Лесі Українки, 2011. 420 с.
5. Tsuei C.C., Kirtley J.R. Pairing symmetry in cuprate superconductors. *Review of Modern Physics*. 2000. 72. P. 969. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.969>.
6. Shutovskiy A., Sakhnyuk V., and Zolotaryuk Y. Fluxon dynamics in long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation. *Eur. Phys. J.* 2022. B 95, P. 134. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-022-00397-8>.
7. Сахнюк В.Є. Дослідження впливу зовнішнього магнітного поля на критичний струм джозефсонівських контактів для температур, близьких до критичної. *Науковий вісник СХУ імені Лесі Українки. Фізичні науки*. Луцьк, 2013. № 26 (275). С. 50–54.

REFERENCES:

1. Golubov, A.A., Kupriyanov, M. Yu., & Il'ichev, E. (2004). The current-phase relation in Josephson junctions. *Rev. Mod. Phys.* 6, p. 411. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.411>.
2. Sakhnyuk, V. E., Pastukh, O. Yu., & Shutowskii A. M. (2017). The effects of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration. *Low Temperature Physics*. 43(6). 664–669. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4985972>.
3. Sakhnyuk, V. E., & Holoviy, V.M. (2011). Vplyv prozorosti diielektrychnoho prosharku na formu zalezhnosti strumu vid riznytsi faz u kontaktakh typu SIS [Influence of dielectric barrier transparency on the current-phase relationship in SIS junctions]. *Zhurnal fizychnykh doslidzhen'*, 15(2), 2702(8pp). DOI: <https://doi.org/10.30970/jps.15.2702>.
4. Svidzynskiy, A.V. (2011). Mikroskopichna teoriia nadprovidnosti [Microscopic theory of superconductivity]: monohrafiia. Luts'k : Volyn. nats un-t im. Lesi Ukrainky, 420 s. [in Ukrainian].
5. Tsuei, C.C., & Kirtley, J.R. (2000). Pairing symmetry in cuprate superconductors. *Review of Modern Physics*. 72. P. 969. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.72.969>.
6. Shutovskiy, A., Sakhnyuk, V., & Zolotaryuk, Y. (2022). Fluxon dynamics in long Josephson junctions with nontrivial current-phase relation. *Eur. Phys. J. B* 95. P.134. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-022-00397-8>.
7. Sakhniuk, V.E. (2013). Doslidzhennia vplyvu zovnishnoho mahnitnoho polia na krytychnyi strum yozefsonivskykh kontaktiv dlia temperatur, blyzkykh do krytychnoi [A study of the influence of an external magnetic field on the critical current in Josephson junctions for temperatures near the critical temperature]. *Naukovyi visnyk SNU imeni Lesi Ukrainky. Fizychni nauky*. Lutsk, 26(275), 50–54.