

УДК 531.5: 615.9: 620.9

DOI <https://doi.org/10.32782/pet-2025-2-5>

Оксана ЗАМУРУЄВА

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі, 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0032-0613>

SCOPUS AUTHOR ID: 56181742100

Каріна КРУПКО

здобувачка вищої освіти навчально-наукового фізико-технологічного інституту, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі, 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025

Василь САХНЮК

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі, 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9225-7473>

SCOPUS AUTHOR ID: 13405019700

Андрій ІВАНОВСЬКИЙ

аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі, 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025

Віктор ЛЕВАНДОВСЬКИЙ

аспірант кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі, 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025

Бібліографічний опис статті: Замуруєва, О., Крупко, К., Сахнюк, В., Івановський, А., Левандовський, В. (2025). Моделювання та оптимальне керування біонічним протезом верхньої кінцівки в сагітальній площині. *Фізика та освітні технології*, 2, 31–41, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-2-5>

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ БІОНІЧНИМ ПРОТЕЗОМ ВЕРХНЬОЇ КІНЦІВКИ В САГІТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

У роботі досліджено процес моделювання та оптимального керування біонічним протезом верхньої кінцівки в сагітальній площині. Метою дослідження є створення математичної моделі біонічного протеза верхньої кінцівки, моделювання його руху в сагітальній площині та розробка робастного лінійно-квадратичного регулятора (LQR) для забезпечення фізіологічно природної реакції ліктьового суглоба з урахуванням кутового положення, швидкості та прискорення.

Для опису рухів верхньої кінцівки використано лагранжевий формалізм, що дозволив отримати рівняння руху дволанкової моделі руки. Система рівнянь була лінеаризована в околі робочих точок. Для побудови оптимального закону керування застосовано методи теорії оптимального керування, зокрема синтез LQR-контролера. Розрахунки та моделювання виконано в середовищі MATLAB із використанням відкритої біомеханічної моделі руки OpenSim.

У роботі поєднано нелінійне динамічне моделювання з апроксимацією у просторі станів для розробки робастного контролера. Запропонований підхід доводить можливість ефективного відтворення фізіологічних рухів верхньої кінцівки з використанням LQR-регулятора. Отримані результати показують здатність системи підтримувати стабільність та точність рухів навіть за умов збурень і похибок у вимірах, що наближає її до біологічних принципів керування.

Розроблений LQR-контролер забезпечує стійке, точне та енергоефективне керування рухами біонічного протеза верхньої кінцівки у сагітальній площині. Запропонована модель може бути використана як основа для створення прототипів високотехнологічних біонічних пристроїв та подальших досліджень у напрямі розширення моделі до тривимірного простору та інтеграції нейронних або ЕМГ-сигналів для більш природного керування.

Ключові слова: біонічний протез, динамічне моделювання, сагітальна площина, лінійно – квадратичний контролер, OpenSim, MATLAB.

Oksana ZAMURUIEVA

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Physics named by A. V. Svidzynskiy, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Volyn region, Ukraine, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0032-0613>

SCOPUS AUTHOR ID: 56181742100

Karina KRUPKO

Student of the Educational and Scientific Institute of Physics and Technology, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Volyn region, Ukraine, 43025

Vasyl SAKHNYUK

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Physics named by A. V. Svidzynskiy, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Volyn region, Ukraine, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9225-7473>

SCOPUS AUTHOR ID: 13405019700

Andrew IVANOVSYI

Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Physics named by A. V. Svidzynskiy, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Volyn region, Ukraine, 43025

Viktor LEVANDOVSKIY

Postgraduate Student at the Department of Theoretical and Computer Physics named by A. V. Svidzynskiy, Lesya Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Volyn region, Ukraine, 43025

To cite this article: Zamuruieva, O., Krupko, K., Sakhnyuk, V., Ivanovsyi, A., Levandovskyi, V. (2025). Modeliuvannia ta optymalne keruvannia bionichnym protezom verkhnoi kintsivky v sahitalnii ploshchyni [Modeling and Optimal Control of an Upper-Limb Bionic Prosthesis in the Sagittal Plane]. *Physics and Educational Technology*, 2, 31–41, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-2-5>

MODELING AND OPTIMAL CONTROL OF AN UPPER-LIMB BIONIC PROSTHESIS IN THE SAGITTAL PLANE

The study investigates the modelling and optimal control of a bionic upper-limb prosthesis in the sagittal plane. The aim is to develop a mathematical model of the bionic upper limb, simulate its motion in the sagittal plane, and design a robust linear-quadratic regulator (LQR) to ensure a physiologically natural response of the elbow joint, taking into account angular position, velocity, and acceleration.

To describe upper-limb motions, the Lagrangian formalism is employed, enabling derivation of the equations of motion for a two-link arm model. The system of equations is linearized in the vicinity of operating points. Methods of optimal control theory, in particular the synthesis of an LQR controller, are applied to obtain the optimal control law. Computations and simulations are carried out in MATLAB using the open biomechanical arm model from OpenSim.

The work combines nonlinear dynamic modelling with a state-space approximation to develop a robust controller. The proposed approach demonstrates the feasibility of effectively reproducing physiological upper-limb movements using an LQR regulator. The obtained results show the system's ability to maintain stability and motion accuracy even under disturbances and measurement errors, bringing it closer to biological control principles.

The designed LQR controller provides stable, accurate, and energy-efficient control of the bionic upper-limb prosthesis in the sagittal plane. The proposed model can serve as a basis for prototyping high-technology bionic devices and for further studies aimed at extending the model to three-dimensional space and integrating neural or EMG signals for more natural control.

Key words: bionic prosthesis, dynamic modeling, sagittal plane, linear -quadratic regulator, OpenSim, MATLAB.

Вступ. Актуальність проблеми. Динамічне моделювання широко використовується дослідниками та інженерами-біомеханіками для дослідження проблем у галузі наук про здоров'я та інженерії. Це сприяє кращому розумінню функціонування людського тіла та відкриває можливості застосування моделювання в просторі станів і теорії керування для розробки біомедичних допоміжних технологій і скелетно-м'язових моделей.

Згідно з (Hussain, 2020; Davoudabadi Farahani, 2016), віртуальна модель людини здатна імітувати реальні рухи людського тіла та може бути корисною в різних сферах: ортопедії, травматології (Lemieux, 2013; Ali, 2014), ергономії, розробці спортивного обладнання та підвищенні продуктивності (Rasmussen, 2009; Rasmussen, 2002). Біомеханічні моделі застосовувалися для вирішення задач координації рухів, наприклад, (Kuo, 1995; Golliday, 1995; Grzelczyk, 2018; Szymanowska, 2018). Однак, більшість розроблених методів мають обмежене практичне застосування, адже система керування м'язами людини враховує багато взаємопов'язаних вимог, а центральна нервова система (ЦНС) повинна обирати відповідну активацію м'язів для забезпечення необхідних рухів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Якщо відомі початкові умови, сили та моменти, що діють на систему, динамічна модель може бути використана для прогнозування можливих рухів системи (Yamaguchi, 2007), оскільки сили та моменти пов'язані з положенням, швидкістю та прискоренням системи динамічними рівняннями.

Динамічні моделі широко застосовуються для аналізу кінематики (Hussain, 2016) і дозволяють оцінювати крутні моменти і сили, що виникають у кінцівках під час різних рухів. Це має важливе значення для зниження ризику травматизації. Динамічне моделювання, що включає різні методи, такі як метод Кейна, метод Лагранжа, методи Ньютона-Ейлера та

штучні нейронні мережі, дають змогу оптимізувати нові знання для створення реабілітаційних систем з метою покращення їхньої ефективності при відновленні функцій верхніх кінцівок (Hussain, 2016; Ariff, 2011; Murphy, 2006).

Крім того, на основі кінематичного аналізу можна оцінити рух у просторі, використовуючи лінійні та кутові переміщення, швидкості й прискорення (Murphy, 2006). Однак, для реалістичного відтворення рухів людини необхідний більш точний опис, який забезпечується динамічним моделюванням. У цій роботі динамічне моделювання реалізовано з використанням LQR – оптимального керування зі зворотним зв'язком, що мінімізує відхилення станів системи за умови мінімальних зусиль керування.

Мета дослідження. Розробка робастного лінійно-квадратичного контролера (LQR) за допомогою інструментів MATLAB для отримання фізіологічно природної реакції ліктьового суглоба, що відповідає кутовому положенню, швидкості та прискоренню.

Завдання дослідження. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- Дослідити динамічну модель верхньої кінцівки методом Лагранжа.
- Розробити робастне оптимальне LQR керування на основі класичних методів Ляпунова.
- Реалізувати моделювання в середовищі MATLAB.
- Використати відкриту біомеханічну модель руки OpenSim (Chadwick, 2011; Chadwick, 2014) як об'єкт керування.

Основний матеріал дослідження. Фізичну модель руки будемо вважати механічною системою, що складається з двох стрижів, як це зображено на рис. 1. Довжина стрижнів та їх маса відповідно рівні: Верхній стрижень під'єднаний одним кінцем до точки підвісу та може відносно неї обертатися. До другого

кінця верхнього стрижня під'єднаний один із кінців нижнього стрижня. Нижній стрижень може обертатися відносно верхнього. Однак кут, який він утворює з вертикаллю повинен бути не меншим за кут між вертикаллю і верхнім стрижнем.

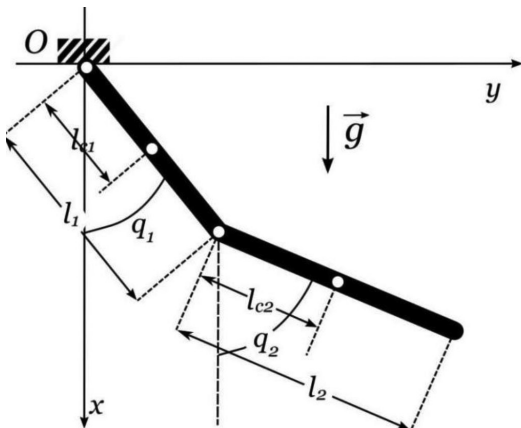


Рис. 1. Фізична модель руки

Зображену на рис. 1. фізичну модель можна розглядати як подвійний фізичний маятник, що може здійснювати рух у вертикальній площині.

Перейдемо до побудови математичної моделі такого маятника. Для задання його положення в просторі використовуємо дві узагальнені координати: $q_1(t)$ – кут відхилення верхнього стрижня від вертикалі; $q_2(t)$ – кут відхилення нижнього стрижня від вертикалі.

Для аналізу динаміки фізичної моделі одержимо рівняння руху механічної системи зображеної на рис. 1. В основі використовуватимемо лагранжевий формалізм у класичній механіці. Виразимо кінетичну та потенціальну U енергії через узагальнені координати, і запишемо функцію Лагранжа.

$$L = E_k - U. \quad (1)$$

Маючи функцію Лагранжа можемо отримати рівняння руху розглядуваної системи, використовуючи загальний вигляд Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = U_i, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

Кінетична енергія системи складається з кінетичних енергій центрів мас стрижнів та кінетичних енергій їх обертального руху навколо центрів мас.

Виразимо декартові координати центрів мас через узагальнені координати:

$$\begin{cases} x_1 = l_{c1} \cos q_1, \\ y_1 = l_{c1} \sin q_1, \\ x_2 = l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos q_2, \\ y_2 = l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin q_2 \end{cases} \quad (3)$$

Тоді кінетична енергія центрів мас знаходиться за формулою:

$$E_{кин} = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \quad (4)$$

Кінетична енергія обертального руху:

$$E_{кин.об.} = \frac{I_1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{I_2}{2} \dot{q}_2^2, \quad (5)$$

де I_1 та I_2 моменти інерції стрижнів відносно їх центрів мас.

Підставляючи (3) в (4) та враховуючи (5) для кінетичної енергії одержимо:

$$E_k = \frac{m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{I_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + 2l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2)] + \frac{I_2 \dot{q}_2^2}{2}. \quad (6)$$

Потенціальна енергія складається з потенціальних енергій центрів мас. За нульовий рівень потенціальної енергії оберемо $x = 0$, тоді:

$$U_1 = -m_1 g x_1 = -m_1 g l_{c1} \cos q_1,$$

$$U_2 = -m_2 g x_2 = -m_2 g (l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos q_2), \quad (7)$$

$$U = U_1 + U_2 = -g(m_1 l_{c1} + m_2 l_1) \cos q_1 - m_2 g l_{c2} \cos q_2.$$

Тепер можемо виписати функцію Лагранжа використовуючи (1) :

$$L = \frac{c_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{c_3 \dot{q}_2^2}{2} + c_2 \cos(q_1 - q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_4 \cos q_1 + c_5 \cos q_2. \quad (8)$$

У (8) запроваджені наступні позначення:

$$c_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1; \quad (9)$$

$$c_3 = m_2 l_{c2}^2 + I_2; \quad c_2 = m_2 l_1 l_{c2};$$

$$c_4 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g; \quad c_5 = m_2 l_{c2} g.$$

Підставляючи (8) у рівняння Лагранжа (2) одержимо рівняння руху фізичної моделі руки людини:

$$\begin{cases} c_1 \ddot{q}_1 + c_2 \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_2 + c_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2 + c_4 \sin q_1 = U_1 \\ c_3 \ddot{q}_2 + c_2 \cos(q_1 - q_2) \ddot{q}_1 - c_2 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1 + c_5 \sin q_2 = U_2 \end{cases} \quad (10)$$

Поділимо перше рівняння системи (10) на c_1 і позначимо:

$$d_1 = \frac{c_2}{c_1}, \quad d_2 = \frac{c_4}{c_1}.$$

Тоді отримаємо рівняння руху в матричній формі:

$$\tilde{M}(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + \tilde{c}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})\dot{\vec{q}} + \tilde{g}(\vec{q}) = \tilde{\vec{U}}, \quad (11)$$

де

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \cos(q_1 - q_2) \\ c_2 \cos(q_1 - q_2) & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 \sin(q_1 - q_2)\dot{q}_2 \\ -c_2 \sin(q_1 - q_2)\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} d_2 \sin q_1 \\ c_5 \sin q_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\vec{U}} = \begin{pmatrix} U_1 \\ c_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

Рівняння (11) є диференціальним рівнянням другого порядку, воно є нелінійною математичною моделлю, що описує динамічні властивості руки людини.

Як відомо стан механічної системи однозначно задається узагальненим координатами та узагальненими швидкостями. Тоді математична модель (11) в термінах вектора стану $\begin{pmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{pmatrix}$ трансформується у рівняння стану першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{q} = \dot{\vec{q}} \\ \frac{d}{dt} \dot{\vec{q}} = \tilde{M}(\vec{q})^{-1}(\tilde{\vec{U}} - \tilde{c}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})), \quad \dot{\vec{q}} - \tilde{g}(\vec{q}). \end{cases} \quad (12)$$

Права частина рівняння (13) є нелінійною функцією:

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{U})$$

і саме через цю функцію маємо, що наша математична модель є нелінійною. Однак, якщо розглядати рух в околі певної точки $(\vec{q}_0, \dot{\vec{q}}_0, \vec{U}_0)$, то рівняння (13) можна лінеаризувати.

Оберемо деяку операційну точку

$$\vec{q}_0, \dot{\vec{q}}_0, \ddot{\vec{q}}_0, \vec{U}_0,$$

яка задає стан системи, прискорення в цьому стані та значення керуючих зусиль. Перепишемо рівняння (13) у вигляді

$$\vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}}, \vec{U}) = \vec{f}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{U}) - \ddot{\vec{q}} = 0. \quad (14)$$

Виконаємо розклад функції $\vec{F}$ в ряд в околі операційної точки, зберігаючи доданки не вище лінійних.

$$\vec{F}(\vec{q}_0, \dot{\vec{q}}_0, \ddot{\vec{q}}_0, \vec{U}_0) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \ddot{\vec{q}}} \Big|_{\ddot{\vec{q}}_0} \Delta \ddot{\vec{q}} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{\vec{q}}} \Big|_{\dot{\vec{q}}_0} \Delta \dot{\vec{q}} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{q}} \Big|_{\vec{q}_0} \Delta \vec{q} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} \Big|_{\vec{U}_0} \Delta \vec{U} = 0. \quad (15)$$

В операційній точці перший доданок дорівнює нулеві, тоді враховуючи (14) можемо (15) переписати у вигляді

$$\ddot{\vec{q}} = \frac{\partial f}{\partial \ddot{\vec{q}}} \Big|_{\ddot{\vec{q}}_0} \Delta \ddot{\vec{q}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\vec{q}}} \Big|_{\dot{\vec{q}}_0} \Delta \dot{\vec{q}} + \frac{\partial f}{\partial \vec{U}} \Big|_{\vec{U}_0} \Delta \vec{U}. \quad (16)$$

Представлена рівнянням (16) лінійна модель є апроксимацією нелінійної системи в околі операційної точки. Такий підхід широко використовується в теорії управління оскільки лінійні моделі набагато простіше аналізувати та контролювати, ніж нелінійні. Однак варто зауважити, що лінеаризована модель є лише апроксимацією оригінальної системи, а її точність залежить від вибору операційної точки та величини відхилень від цієї точки. Для великих відхилень від операційної точки лінеаризована модель може давати неточні результати, а в деяких випадках може привести і до втрати важливої інформації про динаміку нелінійної системи.

Розпишемо рівняння (16) більш детально.

Враховуючи, що вектор $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ складається з двох компонент:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{q}} \Big|_{\ddot{q}_0} \ddot{q} + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} \Big|_{\dot{q}_0} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \vec{U}} \Big|_{\vec{U}_0} \vec{U} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \Big|_{q_0} q_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \Big|_{q_0} q_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} \Big|_{\dot{q}_0} \dot{q}_1 + \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} \Big|_{\dot{q}_0} \dot{q}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial U_1} \Big|_{U_0} U_1 + \frac{\partial f_1}{\partial U_2} \Big|_{U_0} U_2 = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1}{\partial U_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогічно можемо написати для $\ddot{q}_2$:

$$\ddot{q}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial U_1} \frac{\partial f_2}{\partial U_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Рівняння (12), (17), (18) можна представити у вигляді одного матричного

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{U}. \quad (19)$$

Тут запроваджені матриці:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2}{\partial U_2} \end{pmatrix}, \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Для вектора $\vec{y} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}$ на основі (17) і (18) одержимо:

$$\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{U}, \quad (21)$$

якщо запровадити матриці

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{q}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}_2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2}{\partial U_2} \end{pmatrix}.$$

Співвідношення (19) і (21) є лінійною моделлю, якою апроксимується нелінійна математична модель руки в околі операційної точки.

Для знаходження числових значень елементів матриць А, В, С, D необхідно знайти явні вирази для функцій f_1 , f_2 , та обчислити відповідні похідні в операційній точці. В матричній формі для маємо:

$$\vec{f}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \vec{U}) = \tilde{M}^{-1}(\vec{U} - \tilde{C}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})\ddot{\vec{q}} - \vec{g}(\vec{q})). \quad (22)$$

Тут $\tilde{M}^{-1}$ – обернена до $\tilde{M}$ матриця, її елементи легко обчислюються, в результаті

$$\tilde{M}^{-1} = \frac{1}{c_3 - c_2 d_1 \cos^2(q_1 - q_2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} c_3 & -d_1 \cos(q_1 - q_2) \\ -c_2 \cos(q_1 - q_2) & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Підставляючи в (22), (11) та (23) одержимо вирази для f_1 та f_2 :

$$f_1 = \frac{1}{c_3 - c_2 d_1 \cos^2(q_1 - q_2)} \times$$

$$\times \left[\frac{c_3 U_1}{c_1} - c_3 d_1 \dot{q}_2^2 \sin(q_1 - q_2) - c_3 d_2 \sin q_1 + \right. \\ \left. + d_1 \cos(q_1 - q_2)(c_5 \sin q_2 - U_2 - c_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_1 - q_2)) \right], \quad (24)$$

$$f_2 = \frac{1}{c_3 - c_2 d_1 \cos^2(q_1 - q_2)} \times$$

$$\times \left[U_2 + c_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_1 - q_2) - c_5 \sin q_2 + \right. \\ \left. + \cos(q_1 - q_2)(c_2 d_2 \sin q_1 - d_1 U_1 + c_2 d_1 \dot{q}_2^2 \sin(q_1 - q_2)) \right]. \quad (25)$$

Розробка LQR-керування. Ґрунтуючись на відомій теорії (Куо, 1995; Brian, 1989) розробки LQR-керування, у цьому дослідженні ми розробляємо та проєктуємо LQR-контролер, за якого траєкторії станів мінімізують цільову функцію з відповідними матрицями, що зважають відхилення станів від номінальних значень.

Розроблене LQR-керування забезпечує коефіцієнти зворотного зв'язку, які гарантують стабільну та плавну траєкторію зміни стану системи.

Щоб перевести систему до цільових значень стану $x(t) = \bar{x}$, введемо нові змінні у та виконаємо заміну $x(t) = \bar{x} + y$, $U = \bar{U} + v$.

Тут керуючий вплив $\bar{u}$ обирається з умови $Ax + B\bar{U} = 0$.

Отримуємо $\bar{U} = -B^{-1}A\bar{x}$ і нова система набуває вигляду:

$$\dot{y} = Ay + Bv$$

має нульове положення рівноваги.

Наша мета полягає в тому, щоб знайти матрицю підсилення керування K , щоб керована система

$$U = \bar{U} - K(x - \bar{x})$$

досягала асимптотичної стабільності, а також оптимізувала функціонал вартості.

$$J = \int_0^{\infty} [(x - \bar{x})^T Q (x - \bar{x}) + (U - \bar{U})^T R (U - \bar{U})] dt.$$

Тут Q і R – матриці вагових коефіцієнтів для відхилень станів x і керувань u від їхніх номінальних значень, відповідно.

Закон керування $u(x)$ асимптотично приводить систему до цільового значення $\bar{x}$.

Розв'язавши алгебраїчне рівняння Ріккати,

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P = 0,$$

отримаємо матрицю підсилення $K = R^{-1}B^T P$. Цей контролер створює стабільність системи та її перехід до цільових значень, що підтверджує оптимальність і асимптотичну стабільність системи похибок, яка описується рівнянням Гамільтона–Якобі–Беллмана.

Нелінійну динаміку дволанкової структури було лінеаризовано навколо робочих точок. Тоді ми можемо записати апроксимовані лінійні моделі системи. У результаті, стратегію LQR-керування можна визначити як рух суглобів, що ініціюється нейронним зусиллям, пов'язаним з природними рухами.

Отримаємо лінеаризовану систему, яка має вигляд

$$\dot{x} = Ax + BU,$$

де системні матриці A, B, C, D мають наступний вигляд:

Для стаціонарного положення (робоча точка 1): $x_0^1, U_0^1 = ([0; 0; 0; 0], [0; 0])$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -54.09 & 23.49 & 0 & 0 \\ 76.33 & -67.78 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.061 & -1.497 \\ -1.497 & 4.32 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -54.09 & 23.49 & 0 & 0 \\ 76.33 & -67.78 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1.061 & -1.497 \\ -1.497 & 4.32 \end{pmatrix}.$$

Робоча точка 2: цільова позиція $q_1 = 180^\circ$, $q_2 = 180^\circ$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 54.09 & -23.49 & 0 & 0 \\ -76.33 & 67.78 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.061 & -1.497 \\ -1.497 & 4.32 \end{pmatrix}.$$

Робоча точка 3: цільова позиція $q_1 = 90^\circ$, $q_2 = 90^\circ$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -54.09 & 23.49 & 0 & 0 \\ 76.33 & -67.78 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.061 & -1.497 \\ -1.497 & 4.32 \end{pmatrix}.$$

Робоча точка 4: $q_1 = 0^\circ$, $q_2 = 90^\circ$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -15.62 & -12.00 & 0 & 0 \\ -0.001041 & 0.000152 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5416 & 0.0001558 \\ -0.0001558 & 2.206 \end{pmatrix}.$$

ЦНС поводить лінійно в околі обраних робочих точок, що відповідають бажаному руху. Обчислені дані були зібрані у відповідну базу даних, доступну для вибору стратегії контролера.

Експериментальні результати. Використовуючи відповідні набори інструментів MATLAB та моделі плеча OpenSim, ми визначаємо робочу точку як еталонні значення кутів, прискорень і швидкостей, отримані з проведених експериментів. В результаті ми отримуємо довідкову таблицю для оцінювання контролера. Контролер використовує дані робочих точок, беручи початкові та еталонні значення з довідкової таблиці.

Було проведено серію експериментів для моделі тіла з наступними параметрами: маса тіла 75 кг, зріст 182 см.

Таблиця 1

Типові параметри руки, отримані з моделі OpenSim

Позначення	Величина	Значення	Одиниця вимірювання
m_1	Маса ланки 1	1.4	кг
m_2	Маса ланки 2	1.1	кг
r_1	Довжина ланки 1	0.3	м
r_2	Довжина ланки 2	0.33	м
I_1	Момент інерції ланки 1	0.025	кг · м ²
I_2	Момент інерції ланки 2	0.045	кг · м ²

Експериментальні дані моделі отримано з віртуальної установки OpenSim. Необхідні експериментальні дослідження були проведені в реальному часі для забезпечення подальшого аналізу в середовищі MATLAB. Віртуальний полігон представлено на рис. 2, а відповідну технологічну схему – на рис. 3.

З метою проведення аналізу та отримання реальних даних, які використовуються як еталонні значення для моделювання закону керування, було виконано експериментальне тестування та аналіз даних (рис. 2–4). Отримані еталонні значення було зібрано, перетворено, проаналізовано, конвертовано у відповідні одиниці вимірювання, а потім використано для моделювання контролера. Використовуючи інструменти аналізу даних CFTool, доступні в MATLAB, ми обчислюємо еталонні значення станів системи відповідно до проведених експериментів.

Для створення відповідної довідкової таблиці з метою оцінювання контролера було проведено серію експериментів. Контролер отримує початкові та еталонні значення з попередніх експериментальних даних, зібраних у відповідній довідковій таблиці, з якої і вибираються еталонні значення.

Для оцінювання розробленого закону керування ми використовуємо Control System Toolbox MATLAB для розв'язання рівняння Ріккаті та функцію ode45 для моделювання динамічної системи. За допомогою функції MATLAB csc ми обчислюємо X – розв'язок рівняння Ріккаті. Ми обираємо матриці вагових коефіцієнтів R і Q та приводимо стани і керування до їхньої цільової заданої точки.

Експеримент 1.

Для робочої точки 2 з цільовою позицією $q_1 = 180^\circ$, $q_2 = 180^\circ$, ми обираємо матриці вагових коефіцієнтів:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

отримуємо матрицю робастного керування

$$K = \begin{pmatrix} 93.43 & 7.63 & 17.62 & 4.7 \\ -32.16 & 28.81 & -2.30 & 3.58 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнт підсилення керування становить

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 256.4 \\ -493.74 \end{pmatrix}.$$

Результуючу керовану траєкторію для станів q_1 , q_2 можна побачити на рис. 2.

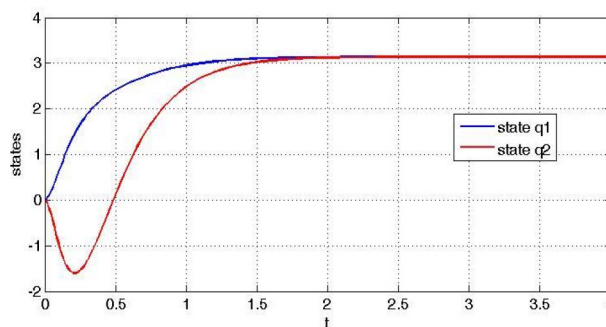


Рис. 2. Керована траєкторія

Експеримент 2.

Для робочої точки 3 з цільовою позицією $q_1 = 90^\circ$, $q_2 = 90^\circ$, ми обираємо ті самі матриці вагових коефіцієнтів Q , R . Отримуємо коефіцієнт підсилення керування, що дорівнює

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 128.4 \\ -246.87 \end{pmatrix}.$$

Отриману траєкторію керованого руху можна побачити на рис. 3. для станів q_1 , q_2 .

Експеримент (3).

Для робочої точки 4 з цільовою позицією $q_1 = 0^\circ$, $q_2 = 90^\circ$, обираємо матриці вагових коефіцієнтів:

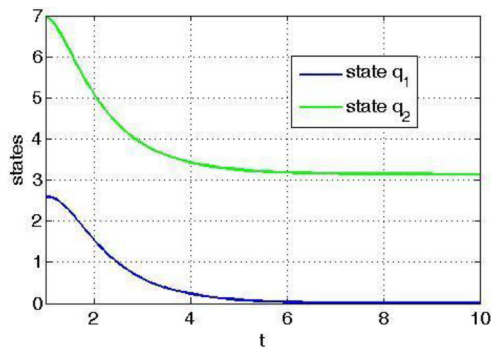


Рис. 3. Керовані стани, що відстежують задані значення

$$Q = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

отримуємо матрицю робастного керування

$$K = \begin{pmatrix} 18.8 & -13.08 & 4.8 & -1.60 \\ -28.36 & 21.25 & -7.18 & 4.29 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнт підсилення керування становить

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15.43 \\ 147.21 \end{pmatrix}.$$

Отриману траєкторію керованого руху можна побачити на рис. 4. для станів q_1, q_2 .

Розроблений LQR-контролер демонструє стабільну траєкторію станів, робастність, малу похибку у усталеному режимі, швидку реакцію та є адекватною моделлю біологічних контролерів. Отримані траєкторії керованого руху наближаються до заданого значення,

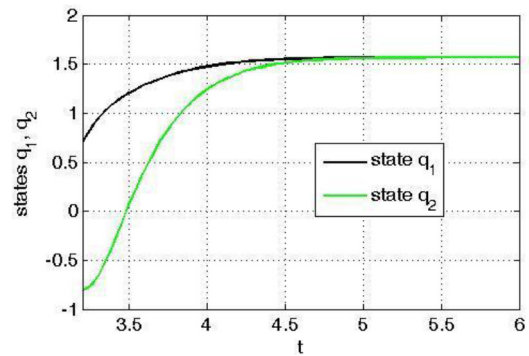


Рис. 4. Керовані стани

у порівнянні з іншими експериментальними даними.

Коефіцієнти керування добре апроксимують поведінку системи, забезпечують швидке досягнення цільових значень, як показано на рис. 2–4. Керування забезпечує робастність, плавну зміну траєкторії, стабілізацію, збіжність похибки оцінювання до нуля та мінімізацію енергії та зусиль керування.

Висновки. У цій роботі розроблено робастне оптимальне керування, отримано експериментальні стани та їхню якісну реалізацію моделі на основі техніки LQR-керування. Результати можуть бути використані для визначення параметрів оптимізації функціональних властивостей удосконалених прототипів, визначення умов оптимальної механічної структури, стабілізації рухів і параметрів оптимального інтелектуального керування. Отримані результати сприяють вирішенню проблем реабілітації людей з обмеженими можливостями верхніх кінцівок на основі технологій математичного та комп'ютерного моделювання складних систем із застосуванням засобів системного аналізу, теорії стійкості та керування.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Hussain Z., Azlan N. Z. 3-D Dynamic Modeling and Validation of Human Arm for Torque Determination During Eating Activity Using Kane's Method. *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 44, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40997-019-00299-8>
2. Davoudabadi Farahani S., Svinin M., Andersen M. S., de Zee M., Rasmussen J. Prediction of closed-chain human arm dynamics in a crank-rotation task. *Journal of Biomechanics*. 2016. Vol. 49, No. 13. P. 2684–2693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2016.05.034>
3. Lemieux P. O., Tetreault P., Hagemeister N., Nuno N. Influence of prosthetic humeral head size and medial offset on the mechanics of the shoulder with cuff tear arthropathy: A numerical study. *Journal of Biomechanics*. 2013. Vol. 46, No. 4. P. 806–812. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2012.11.021>
4. Ali N., Andersen M. S., Rasmussen J., Robertson D. G. E., Rouhi G. The application of musculoskeletal modeling to investigate gender bias in non-contact ACL injury rate during single-leg landings. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2014. Vol. 17, No. 14. P. 1602–1616.

5. Rasmussen J., Torholm S., de Zee M. Computational analysis of the influence of seat pan inclination and friction on muscle activity and spinal joint forces. *International Journal of Industrial Ergonomics*. 2009. Vol. 39, No. 1. P. 52–57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ergon.2008.07.008>
6. Rasmussen J., Holmberg L. J., Sorensen K., Kwan M., Andersen M. S., de Zee M. Performance optimization by Musculoskeletal simulation. *Movement & Sport Sciences – Science & Motricité*. 2012. Vol. 1, No. 75. P. 73–83.
7. Yamaguchi G. T. *Dynamic Modelling of Musculoskeletal Motion*. New York: Springer, 2006.
8. Hussain Z. Kane's Method for Dynamic Modeling. *Proceedings of International Conference*, October 2016. P. 174–179.
9. Ariff F. H. M., Rambely A. S., Ghani N. A. A. Shoulder's modeling via Kane's method: Determination of torques in smash activity. *IFMBE Proceedings*. 2011. Vol. 35, No. 6. P. 207–209. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-21729-6_55
10. Murphy M. A., Sunnerhagen K. S., Johnels B., Willén C. Three-dimensional kinematic motion analysis of a daily activity drinking from a glass: A pilot study. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. 2006. Vol. 3. P. 1–11. DOI: <https://doi.org/10.1186/1743-0003-3-18>
11. Kuo A. An optimal control model for analyzing human postural balance. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 1995. Vol. 42, No. 1. P. 87–101.
12. Golliday C., Hemami H. Postural stability of the two-degree-of-freedom biped by general linear feedback. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 1995. Vol. 42, No. 1. P. 102–110.
13. Grzelczyk D., Biesiacki P., Mrozowski J., Awrejcewicz J. A 3-link model of a human for simulating a fall in forward direction. In: *Dynamical Systems in Applications*. Springer, 2018. P. 845–856.
14. Grzelczyk D., Szymanowska O., Awrejcewicz J. Kinematic and dynamic simulation of an octopod robot controlled by different central pattern generators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 2018. Vol. 232, No. 8. P. 1011–1022.
15. Chadwick E. K., Blana D., Simera J. D., Lambrecht J., Kim S. P., Cornwell A. S., Taylor D. M., Hochberg L. R., Donoghue J. P., Kirsch R. F. Continuous neuronal ensemble control of simulated arm reaching by a human with tetraplegia. *Journal of Neural Engineering*. 2011. Vol. 8, No. 3. Article 034003. DOI: <https://doi.org/10.1088/1741-2560/8/3/034003>
16. Chadwick E. K., Blana D., Kirsch R. F., van den Bogert A. J. Real-Time Simulation of Three-Dimensional Shoulder Girdle and Arm Dynamics. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2014. In press. URL: http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=67554584
17. Brian D., Anderson O., Moore J. *Optimal Control. Linear Quadratic Methods*. Canberra: Prentice-Hall International, Inc., 1989. ISBN 0-13-638651-2.

REFERENCES:

1. Hussain, Z., & Azlan, N. Z. (2020). 3-D dynamic modeling and validation of human arm for torque determination during eating activity using Kane's method. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, 44(3), 703–712. <https://doi.org/10.1007/s40997-019-00299-8>
2. Davoudabadi Farahani, S., Svinin, M., Andersen, M. S., de Zee, M., & Rasmussen, J. (2016). Prediction of closed-chain human arm dynamics in a crank-rotation task. *Journal of Biomechanics*, 49(13), 2684–2693. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2016.05.034>
3. Lemieux, P. O., Tétreault, P., Hagemester, N., & Nuno, N. (2013). Influence of prosthetic humeral head size and medial offset on the mechanics of the shoulder with cuff tear arthropathy: A numerical study. *Journal of Biomechanics*, 46(4), 806–812. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2012.11.021>
4. Ali, N., Andersen, M. S., Rasmussen, J., Robertson, D. G. E., & Rouhi, G. (2014). The application of musculoskeletal modeling to investigate gender bias in non-contact ACL injury rate during single-leg landings. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 17(14), 1602–1616.
5. Rasmussen, J., Torholm, S., & de Zee, M. (2009). Computational analysis of the influence of seat pan inclination and friction on muscle activity and spinal joint forces. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 39(1), 52–57. <https://doi.org/10.1016/j.ergon.2008.07.008>
6. Rasmussen, J., Holmberg, L. J., Sorensen, K., Kwan, M., Andersen, M. S., & de Zee, M. (2012). Performance optimization by musculoskeletal simulation. *Movement & Sport Sciences – Science & Motricité*, 1(75), 73–83.
7. Yamaguchi, G. T. (2006). *Dynamic modelling of musculoskeletal motion*. Springer.
8. Hussain, Z. (2016, October). Kane's method for dynamic modeling. In *Conference Proceedings* (pp. 174–179).
9. Ariff, F. H. M., Rambely, A. S., & Ghani, N. A. A. (2011). Shoulder's modeling via Kane's method: Determination of torques in smash activity. In *IFMBE Proceedings*, 35(6), 207–209. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21729-6_55
10. Murphy, M. A., Sunnerhagen, K. S., Johnels, B., & Willén, C. (2006). Three-dimensional kinematic motion analysis of a daily activity drinking from a glass: A pilot study. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 3(1), 1–11. <https://doi.org/10.1186/1743-0003-3-18>

11. Kuo, A. (1995). An optimal control model for analyzing human postural balance. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 42(1), 87–101.
12. Golliday, C., & Hemami, H. (1995). Postural stability of the two-degree-of-freedom biped by general linear feedback. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 42(1), 102–110.
13. Grzelczyk, D., Biesiacki, P., Mrozowski, J., & Awrejcewicz, J. (2018). A 3-link model of a human for simulating a fall in forward direction. In J. Awrejcewicz (Ed.), *Dynamical systems in applications* (pp. 845–856). Springer.
14. Grzelczyk, D., Szymanowska, O., & Awrejcewicz, J. (2018). Kinematic and dynamic simulation of an octopod robot controlled by different central pattern generators. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 232(8), 1011–1022.
15. Chadwick, E. K., Blana, D., Simera, J. D., Lambrecht, J., Kim, S. P., Cornwell, A. S., Taylor, D. M., Hochberg, L. R., Donoghue, J. P., & Kirsch, R. F. (2011). Continuous neuronal ensemble control of simulated arm reaching by a human with tetraplegia. *Journal of Neural Engineering*, 8(3), 034003. <https://doi.org/10.1088/1741-2560/8/3/034003>
16. Chadwick, E. K., Blana, D., Kirsch, R. F., & van den Bogert, A. J. (2014). Real-time simulation of three-dimensional shoulder girdle and arm dynamics. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. Advance online publication. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=6755458
17. Brian, D., Anderson, O., & Moore, J. (1989). *Optimal control: Linear quadratic methods*. Prentice-Hall International. ISBN 0-13-638651-2zs

Дата надходження статті: 02.10.2025

Дата прийняття статті: 19.10.2025

Опубліковано: 30.12.2025