

УДК 521.135

DOI <https://doi.org/10.32782/pet-2025-2-16>

Павло ШИГОРІН

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної фізики імені А. В. Свідзинського, Волинський національний університет імені Лесі Українки, просп. Волі 13, м. Луцьк, Волинська обл., Україна, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2396-8041>

SCOPUS AUTHOR ID: 36024496600

Дарія ЛИСЕНКО

здобувач вищої освіти, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64/13, м. Київ, Україна, 01601

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0006-0428-5439>

Бібліографічний опис статті: Шигорін, П., Лисенко, Д. (2025). Дослідження кутового розташування точок Лагранжа. *Фізика та освітні технології*, 2, 120–127, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-2-16>

ДОСЛІДЖЕННЯ КУТОВОГО РОЗТАШУВАННЯ ТОЧОК ЛАГРАНЖА

У роботі проведено теоретичне дослідження точок Лагранжа для обмеженої задачі трьох тіл з використанням полярної системи координат. Використовуючи ефективний гравітаційний потенціал було побудовано співвідношення, які описують кутове та радіальне розташування точок Лагранжа в залежності від співвідношення характерних параметрів системи. Для одержання аналітичних виразів була застосована теорія збурень, малим параметром якої є відношення мас головних компонент системи. Використання полярних координат дозволило в явному вигляді описувати кутовий розподіл точок рівноваги. Було показано, що кутове положення точок Лагранжа L_4 та L_5 , в залежності від співвідношення мас двох головних компонент, буде змінюватися в межах від $\pi/3$ до $\pi/2$. Одержаний результат було підтверджено на прикладах зоряних систем Groombridge 34, HD 155358 та HD 69830, для яких виконується різні співвідношення мас в діапазонах від $0,443 \cdot 10^{-5}$ до 0,383. Одержане в роботі співвідношення, яке описує кутовий розподіл точок Лагранжа, було застосоване для дослідження екзопланетної зоряної системи PDS 70. На основі аналізу зображень зоряної системи PDS 70 було визначено кутове положення газопилової хмарини, яка розташована на орбіті екзопланети PDS 70b. З іншого боку, було розраховане кутове розташування цієї хмарини на основі відомостей про масу центральної зорі в системі PDS 70 та масу екзопланети PDS 70b. У результаті досліджень показано, що хмара пилу, в якій формується нова планета, розташована у точці Лагранжа L_5 системи PDS 70 – PDS 70b. Цей результат підтверджує гіпотезу про те, що на орбіті екзопланети PDS 70b формується ще одна «троянська» екзопланета. Це дозволяє нам стверджувати, що коорбітальні конфігурації, відомі у Сонячній системі (наприклад, троянські астероїди Юпітера), є універсальним явищем, здатним виникати і в екзопланетних системах.

Ключові слова: точки Лагранжа, полярні координати, кутовий розподіл, екзосистема PDS 70, коорбітальні конфігурації, троянські екзопланети.

Pavlo SHYGORIN

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Theoretical and Computer Physics named by A. V. Svidzynsky, Lesia Ukrainka Volyn National University, 13 Volya ave., Lutsk, Volyn region, Ukraine, 43025

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-2396-8041>

SCOPUS AUTHOR ID: 36024496600

Dariia LYSENKO

Higher Education Student, Taras Shevchenko National University of Kyiv, 64/13 Volodymyrska str., Kyiv, Ukraine, 01601

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0006-0428-5439>

To cite this article: Shygorin, P., Lysenko, D. (2025). Doslidzhennia kutovoho rozpodilu tochok Lahranzha [Investigation of the angular distribution of Lagrange points]. *Physics and Educational Technology*, 2, 120–127, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2025-2-16>

INVESTIGATION OF THE ANGULAR DISTRIBUTION OF LAGRANGE POINTS

This work presents a theoretical investigation of the Lagrange points for the restricted three-body problem using the polar coordinate system. Employing the effective gravitational potential, relationships were derived to describe the angular and radial positions of the Lagrange points as functions of the characteristic parameters of the system. To obtain analytical expressions, perturbation theory was applied, with the small parameter being the mass ratio of the primary components of the system. The use of polar coordinates allowed the explicit description of the angular distribution of the equilibrium points. It was shown that the angular position of the Lagrange points L4 and L5, depending on the mass ratio of the two primary components, varies within the range from $\pi/3$ to $\pi/2$. The obtained result was confirmed with examples of the stellar systems Groombridge 34, HD 155358, and HD 69830, which exhibit different mass ratios in the range from $0,443 \cdot 10^{-5}$ to 0,383. The relationship describing the angular distribution of the Lagrange points derived in this work was applied to the study of the exoplanetary system PDS 70. Based on the analysis of images of the PDS 70 system, the angular position of a gas–dust cloud located on the orbit of the exoplanet PDS 70b was determined. Additionally, the angular position of this cloud was calculated using the known mass of the central star in the PDS 70 system and the mass of the exoplanet PDS 70b. The results show that the dust cloud in which a new planet is forming is located at the L5 Lagrange point of the PDS 70 – PDS 70b system. This finding supports the hypothesis that another “Trojan” exoplanet is forming in the orbit of PDS 70b. It also allows us to assert that co-orbital configurations, known in the Solar System (e.g., Jupiter’s Trojan asteroids), are a universal phenomenon capable of arising in exoplanetary systems.

Key words: Lagrange points, polar coordinates, angular distribution, PDS 70 exosystem, co-orbital configurations, Trojan exoplanets.

Вступні зауваги. Точки Лагранжа є особливими рівноважними положеннями в обмеженій задачі трьох тіл, у яких результуюче гравітаційне поле та відцентрові сили перебувають у точному балансі [1, 2]. Традиційно їхні властивості вивчаються у декартових координатах, що зручно для розв’язання задач класичної небесної механіки. Водночас перехід до формалізму полярних координат (r , θ) дає змогу виділити кутову компоненту θ , що визначає орієнтацію точок рівноваги у площині орбіти та відкриває додаткові можливості для аналізу кутової стабільності [3, 4].

Дослідження кутового розподілу точок Лагранжа має як теоретичне, так і прикладне значення. У прикладній небесній механіці воно є важливим для планування траєкторій космічних апаратів у точках L1 та L2, де навіть невеликі зміни кутових параметрів можуть впливати на довготривалу стабільність орбіти [5, 6]. У динаміці малих тіл Сонячної системи кутовий аналіз дозволяє визначити закономірності розташування троянців, об’єктів групи Грека та інших резонансних популяцій, а також виявити наслідки зіткнень і гравітаційних збурень [7, 8].

Класичні роботи Лагранжа [1] та Себехелі [2] заклали фундамент для дослідження рівноважних точок і орбітального резонансу. Подальший розвиток теорії наведено у працях Мюррея та Дермотта [3], а також Гомеса з колегами [4], де розглядаються динамічні моделі руху поблизу точок Лагранжа і можливості їхнього практичного використання.

Сучасні дослідження значно розширили знання про кутові характеристики цих точок. Зокрема, місія NASA Лусу [5] зосереджена на вивченні троянців Юпітера з урахуванням їхнього просторового та кутового розподілу, що має безпосереднє значення для вибору оптимальних траєкторій прольоту. У роботі [6] запропоновано чисельне моделювання розподілу земних троянців із визначенням характерних кутових координат, зручних для їхнього виявлення. Дослідження проведене у роботі [7] дало комплексні дані про форми, обертання та нахили осей троянців, що опосередковано відображають їхню кутову орієнтацію в орбітальному просторі. У роботах [8, 9] досліджено кутові особливості фрагментів астероїдних

кластерів у точці L5 Марса, що важливо для моделювання післязіткненової еволюції.

Інший аспект дослідження точок Лагранжа пов'язаний з виявленням троянських екзопланет. Він має фундаментальне значення для сучасної астрономії та планетології. Такі об'єкти демонструють, що коорбітальні конфігурації, відомі у Сонячній системі (наприклад, троянські астероїди Юпітера), є універсальним явищем, здатним виникати і в екзопланетних системах. Їхнє існування надає унікальну можливість простежити ранні етапи формування планет, коли матеріал у точках Лагранжа L4 та L5 може конденсуватися у стабільні тіла. Крім того, троянські екзопланети є ключовим тестом для моделей динамічної стабільності, міграції планет та накопичення планетезималей, що дозволяє уточнювати теоретичні сценарії еволюції планетних систем [10, 11]. Формалізм полярних координат у цьому контексті є особливо зручним, оскільки дає змогу виокремити кутову динаміку та безпосередньо пов'язати її з характеристиками ефективного потенціалу системи.

Таким чином, дослідження кутового розподілу точок Лагранжа у формалізмі полярних координат є актуальним напрямком, який поєднує теоретичну новизну з прикладною цінністю для космічної навігації, динаміки малих тіл і фундаментальних досліджень гравітаційно-зв'язаних систем багатьох тіл.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів. Розглянемо замкнену систему, яка складається із трьох тіл із масами m_1 , m_2 та m_3 розташованими, як показано на рис. 1. Будемо вважати, що тіла знаходяться в одній площині і між ними діє лише

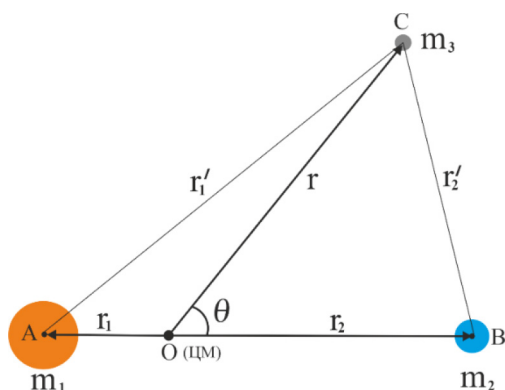


Рис. 1. Геометрія системи трьох тіл у полярних координатах

гравітаційна взаємодія. Ще одним модельним припущенням буде те, що третє тіло має набагато меншу масу у порівнянні з першим та другим. Таке припущення дозволить нам знехтувати впливом третього тіла на рух першого і другого. Нашою метою буде описати рух третього тіла у гравітаційному полі першого та другого. Початок відліку полярної системи координат помістимо в центр мас головних компонент m_1 та m_2 .

Аналіз почнемо з ефективного потенціалу для обмеженої задачі трьох тіл, який в системі відліку, яка обертається з кутовою швидкістю Ω матиме наступний вигляд

$$V_{\text{eff}}(r, \theta) = V_{\text{grav}}(r) - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2. \quad (1)$$

Тут $V_{\text{grav}}(r)$ є гравітаційний потенціал, який визначається співвідношенням:

$$V_{\text{grav}}(r) = -\frac{Gm_1}{r_1'} - \frac{Gm_2}{r_2'}.$$

У полярних ефективний потенціал (1) буде мати вигляд:

$$V_{\text{eff}}(r, \theta) = -\frac{Gm_1}{\left[r^2 + 2rr_1 \cos \theta + r_1'^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{Gm_2}{\left[r^2 - 2rr_2 \cos \theta + r_2'^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2. \quad (2)$$

В околі точок Лагранжа компоненти вектору сили, що діє на третє тіло мають дорівнювати нулеві. Ці умови дадуть нам рівняння для визначення точок Лагранжа. Розглянемо азимутальну складову вектору сили:

$$F_{\theta} = -m_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_{\text{eff}}) = -\frac{1}{r} \frac{Gm_1 m_3}{r_1'^2} \left(\frac{\partial r_1'}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{Gm_2 m_3}{r_2'^2} \left(\frac{\partial r_2'}{\partial \theta} \right).$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial r_1'}{\partial \theta} = \frac{-rr_1 \sin \theta}{\sqrt{r^2 + 2rr_1 \cos \theta + r_1'^2}},$$

$$\frac{\partial r_2'}{\partial \theta} = \frac{rr_2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 - 2rr_2 \cos \theta + r_2'^2}},$$

одержуємо

$$F_{\theta} = Gm_3 \left[\sin \theta \left(\frac{m_1 r_1}{r_1'^3} - \frac{m_2 r_2}{r_2'^3} \right) \right]. \quad (3)$$

З означення центру мас слідує умова $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Тоді формула (3) набуде вигляду:

$$F_\theta = G m_3 m_1 r_1 \left[\sin \theta \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \right]. \quad (4)$$

Прирівнюємо азимутальну силу F_θ до нуля, адже, як зазначалося раніше в точках Лагранжа азимутальна складова сили дорівнює нулю. Одержуємо рівняння

$$\sin \theta \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) = 0. \quad (5)$$

Аналіз рівняння (5) показує, що існує три різні випадки у яких воно задовольняється, а саме:

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi, \quad r_1' = r_2'. \quad (6)$$

Перший випадок відповідає точкам Лагранжа L1, L2, другий – точці L3, а третій – точкам L4, L5. Як бачимо, що у формалізмі полярних координатах доволі прозоро виникають умови, які задають положення точок Лагранжа відносно осі, що з'єднує головні компоненти системи.

Перейдемо до розгляду радіальної складової сили, яка діє на третє тіло. Використовуючи вираз для ефективного потенціалу (2) отримуюмо наступне співвідношення для радіальної компоненти сили, що діє на третє тіло збоку першого та другого

$$\begin{aligned} F_r &= -m_3 \frac{\partial}{\partial r} (V_{\text{eff}}) = \\ &= -\frac{G m_1 m_3}{r_1'^2} \left(\frac{\partial r_1'}{\partial r} \right) - \frac{G m_2 m_3}{r_2'^2} \left(\frac{\partial r_2'}{\partial r} \right) + m_3 \Omega^2 r. \end{aligned} \quad (7)$$

Скористаємося співвідношеннями

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1'}{\partial r} &= \frac{r + r_1 \cos \theta}{\sqrt{r^2 + 2 r r_1 \cos \theta + r_1^2}}, \\ \frac{\partial r_2'}{\partial \theta} &= \frac{r - r_2 \cos \theta}{\sqrt{r^2 - 2 r r_2 \cos \theta + r_2^2}}. \end{aligned}$$

Остаточню радіальну складову сили (7) буде мати вигляд:

$$F_r = G m_3 \left[-\frac{m_1 (r + r_1 \cos \theta)}{r_1'^3} - \frac{m_2 (r - r_2 \cos \theta)}{r_2'^3} + \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^3} r \right]. \quad (8)$$

У точках рівноваги має виконуватись умова $F_r = 0$. Таким чином приходимо до рівняння:

$$\begin{aligned} &-\frac{m_1 (r + r_1 \cos \theta)}{r_1'^3} - \frac{m_2 (r - r_2 \cos \theta)}{r_2'^3} + \\ &+ \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^3} r = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для зручності аналізу рівняння (9) перейдемо до безрозмірної форми. Це дозволить в подальшому виокремити доданки з різними порядками мализни, і, таким чином, спростити дане рівняння. Для цього запровадимо позначення:

$$x = \frac{r}{r_2}, \quad x_1' = \frac{r_1'}{r_2}, \quad x_2' = \frac{r_2'}{r_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}. \quad (10)$$

У нових змінних (10) рівняння (9) набуде вигляду

$$-\frac{x + \mu \cos \theta}{x_1'^3} - \frac{\mu (x - \cos \theta)}{x_2'^3} + \frac{x}{(1 + \mu)^2} = 0. \quad (11)$$

Координати точок Лагранжа будуть визначатися з рівняння (11) та умов (6). Точки L1 та L2, як зазначалося раніше, визначаються умовою $\theta = 0$, яку накладемо на рівняння (11). Зі співвідношень (10) для безрозмірних координат одержуємо вирази

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{r_1'}{r_2} = \frac{\left[r^2 + 2 r r_1 \cos \theta + r_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{r_2} = \\ &= \frac{\left[r^2 + 2 r r_1 + r_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{r_2} = \frac{r + r_1}{r_2} = x + \mu, \\ x_2' &= \frac{r_2'}{r_2} = \frac{\left[r^2 - 2 r r_2 \cos \theta + r_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{r_2} = \\ &= \frac{\left[r^2 - 2 r r_2 + r_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{r_2} = \frac{|r - r_2|}{r_2} = |x - 1|. \end{aligned}$$

Для випадку $\theta = 0$ рівняння (11) набуває вигляду

$$-\frac{1}{(x + \mu)^2} \mp \frac{\mu}{(x - 1)^2} + \frac{x}{(1 + \mu)^2} = 0. \quad (12)$$

Верхній знак біля другого доданка відповідає випадку $x > 1$ (точка L2), а нижній знак – випадкові $x < 1$ (точка L1). Перший доданок в рівнянні (12) описує притягання третього тіла до першого, другий – притягання третього тіла до другого, а третій – інерційний. За своєю структурою рівняння (12) є алгебраїчним рівнянням п'ятого степеня відносно невідомого x . Дане рівняння може бути зведене до форми

Брінга рівняння п'ятого степеня, що дозволяє в подальшому виразити кінцевий розв'язок через еліптичні функції [12]. Альтернативний підхід до відшукування розв'язку рівняння (12) заснований на використанні чисельних методів на кшталт методу Ньютона-Рафсона. У даній роботі ми підемо іншим шляхом, пов'язаним з використанням наближених обчислень, що дозволить отримати аналітичні вирази для координат точок Лагранжа. У переважній більшості реальних космічних систем трьох тіл маса одного з компонент набагато переважає масу двох інших (наприклад Сонце, Юпітер, астероїди Троянці). Це означає, що радіус орбіти третього тіла повинен бути близьким до радіуса орбіти другого тіла. Тому для подальшого аналізу припустимо, що $r \approx r_2 + \Delta r$. Тоді

$$x = \frac{r}{r_2} = \frac{r_2 + \Delta r}{r_2} = 1 + \frac{\Delta r}{r_2} = 1 + \xi. \quad (13)$$

$$\text{Тут } \xi = \frac{\Delta r}{r} \ll 1.$$

Із врахуванням (13) рівняння (12) набуває вигляду:

$$-\frac{1}{(1+\xi+\mu)^2} \mp \frac{\mu}{\xi^2} + \frac{1+\xi}{(1+\mu)^2} = 0. \quad (14)$$

Виконуючи розклади першого та третього доданків у (14) в ряд Тейлора, одержуємо наступні корені рівняння:

$$\xi_{1,2} = \mp \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}.$$

Тоді на основі (13) знаходимо координати розташування першої та другої точок Лагранжа

$$x_{1,2} = x + \xi_{1,2} = 1 \mp \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}. \quad (15)$$

Аналогічним чином знаходяться координати положення точки L3, яка відповідає умові $\theta = \pi$. У результаті одержуємо

$$\begin{aligned} \xi_3 &= \frac{17}{12}\mu, \\ x_3 &= x + \xi_3 = 1 + \frac{17}{12}\mu. \end{aligned} \quad (16)$$

Одержані результати (15) та (16) узгоджується з координатами положень точок Лагранжа L1, L2 та L3 розрахованими у формалізмі декартових координат [3]. Відзначимо простоту і прозорість розрахунку положень

колінеарних точок Лагранжа у розглянутому в роботі методі полярних координат. Проте особливу продуктивність методу полярних координат можна побачити під час розрахунку кутового положення точок L4 та L5. Під час їх розрахунку у формалізмі декартових припускається, що через симетрію вихідного рівняння рівноваги сил, точки L4 та L5 розташовані на кутовій відстані $\pm\pi/3$. Як можна буде переконатися у подальшому висліді з використанням полярних координат, кутове положення точок L4 та L5 може змінюватися в межах $(\pi/3 - \pi/2)$ в залежності від співвідношення мас системи.

Розглянемо третю з умов (6). Одержуємо

$$\begin{aligned} r'_1 &= r'_2, \\ \sqrt{r^2 + 2rr_1 \cos \theta + r_1^2} &= \sqrt{r^2 - 2rr_2 \cos \theta + r_2^2}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\cos \theta = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r(r_1 + r_2)} = \frac{r_2 - r_1}{2r}. \quad (17)$$

Співвідношення (17) дозволяє переписати вирази для відстаней від першого та другого тіла до третього r'_1 та r'_2 у вигляді:

$$\begin{aligned} r'_1 &= r'_2 = \sqrt{r^2 + 2rr_1 \cos \theta + r_1^2} = \\ &= \sqrt{r^2 + 2rr_1 \frac{r_2 - r_1}{2r} + r_1^2} = \sqrt{r^2 + r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Звідси, з огляду на формули (10), випливає

$$x'_1 = x'_2 = \frac{r'_1}{r_2} = \frac{\sqrt{r^2 + r_1 r_2}}{r_2} = \sqrt{x^2 + \mu}. \quad (18)$$

Повертаючись до співвідношення (17) також знаходимо

$$\cos \theta = \frac{r_2 - r_1}{2r} = \frac{1 - \mu}{2x}. \quad (19)$$

Підставимо знайдені вирази (18) та (19) в рівняння (11), яке виражає умову рівності нулю радіальної складової сили, що діє на третє тіло збоку першого та другого. Маємо

$$-\frac{x + \mu \frac{1 - \mu}{2x}}{(\sqrt{x^2 + \mu})^3} - \frac{\mu \left(x - \frac{1 - \mu}{2x} \right)}{(\sqrt{x^2 + \mu})^3} + \frac{x}{(1 + \mu)^2} = 0.$$

Звідси знаходимо рівняння для розрахунку положень L4 та L5:

$$x \left(-(1 + \mu)^3 + (x^2 + \mu)^{\frac{3}{2}} \right) = 0. \quad (20)$$

Таблиця 1

**Розташування точок Лагранжа
в системі Groombridge 34**

$\theta, ^\circ$	75,5°
$r_1, \text{a.o.}$	46,19
$r_2, \text{a.o.}$	139,8
$r_3, \text{a.o.}$	143,4
$r_{4,5}, \text{a.o.}$	115,0

Рівняння (20) має два дійсні розв'язки. Один з них $x = 0$. Цей випадок слід відкинути, адже згідно формули (19) при $x = 0$ косинус перетворюється на безмежність. Інший корінь задовольняє рівняння:

$$(1 + \mu)^3 = (x^2 + \mu)^2.$$

Остаточню, положення точок Лагранжа L4 та L5 описується виразом:

$$x_{4,5} = \sqrt{1 + \mu + \mu^2}. \quad (21)$$

Відзначимо, що результат (21) був одержаний без використання будь-яких наближених методів, тобто він справедливий для довільного співвідношення мас першого та другого компонента системи. Підставивши (21) у співвідношення (19) ми приходимо до формули, яка визначає кутове розташування точок Лагранжа L4 та L5, відносно лінії, яка з'єднує перше та друге (див. рис. 1):

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{1 + \mu + \mu^2}}. \quad (22)$$

ревіримо одержаний результат у граничних випадках. Нехай $\mu \rightarrow 0$ (наприклад система Сонце-Земля), тоді формула (22) дає відоме значення для кута, який визначає напрямок на точки L4 та L5:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Для випадку, коли маси головних компонент є однаковими, значення параметра $\mu = 1$, тоді формула (22) дає наступний результат:

$$\cos \theta = 0, \rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, кутове положення точок Лагранжа L4 та L5 в залежності від співвідношення мас двох головних компонент буде змінюватися в межах від $\pi/3$ до $\pi/2$. Цей результат має важливе значення, адже традиційно

вважається, що точки Лагранжа L4 та L5 розташовані під кутами $\pm \pi/3$.

Одержаний у роботі кутовий розподіл точок Лагранжа (22) характеризується загальністю і дозволяє розрахувати відповідні положення для систем з довільним співвідношенням мас. Це співвідношення може бути використане під час планування різноманітних космічних місій, у яких будуть використовуватися точки Лагранжа L4 та L5.

Співвідношення (15), (16) та (21) нами були застосовані для розрахунку координат точок Лагранжа в зоряних системах Groombridge 34, HD 155358 та HD 69830. Відповідні результати наведені в табл. 1 та табл. 2.

Як можна бачити з результатів наведених у табл. 1 та табл. 2, коли маса одного з компонентів набагато переважає масу іншого ($\mu \rightarrow 0$), то кутове розміщення точок L4 та L5 близьке до $\pi/3$. Якщо ж маси двох компонент співмірні (для системи Groombridge 34 $\mu = 0,383$), то кут θ стає більшим від $\pi/3$.

У даній роботі кутовий розподіл (22) був також застосований для аналізу екзопланетної зоряної системи PDS 70. Особливістю цієї екзосистеми є те, що у ній зафіксовано небесне тіло на одній орбіті з екзопланетою PDS70b (рис. 2) [10, 11].

На основі відомих параметрів PDS 70 [10, 11] нами був проведений розрахунок точок Лагранжа для цієї екзопланетної зоряної системи. Відповідні значення наведені у табл. 3.

Таблиця 2

Параметри екзосистем HD 155358 та HD 69830 та їх точки Лагранжа

Назва системи	Кут θ	$r_1, \text{a.o.}$	$r_2, \text{a.o.}$	$r_3, \text{a.o.}$	$r_{4,5}, \text{a.o.}$	Співвідношення мас μ	Відстань між компонентами, а.о.
HD155358–HD155358b	60,04°	0,60	0,68	0,64	1,02	$9,42 \cdot 10^{-4}$	1,02
HD155358–HD155358c	60,04°	0,95	1,09	1,02	0,64	$9,77 \cdot 10^{-4}$	0,64
HD 69830–HD 69830b	60,00°	0,08	0,08	0,07	0,08	$3,654 \cdot 10^{-5}$	0,08
HD 69830–HD 69830c	60,00°	0,18	0,19	0,18	0,18	$4,37 \cdot 10^{-5}$	0,18
HD 69830–HD 69830d	60,04°	0,61	0,64	0,62	0,62	$4,43 \cdot 10^{-5}$	0,62

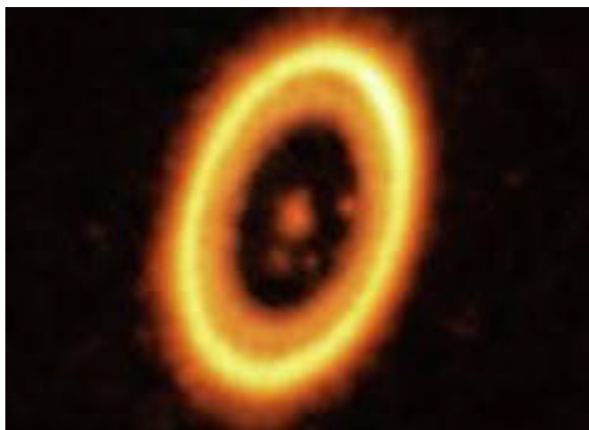


Рис. 2. Зображення екзопланетної зоряної системи PDS 70 створене за допомогою телескопу ALMA

Джерело: <https://www.eso.org/public/images/eso2311b/>

Кутовий розподіл (22) застосований для системи PDS 70 – PDS 70b дає значення кута на точки Лагранжа L4 та L5 $\theta = 60,5^\circ$. Проведений у роботі аналіз зображення системи PDS 70 (див. рис. 2) показав, що газопилова хмара, що розташовується на орбіті екзопланети PDS70b знаходиться на кутовій відстані, яка відповідає точці Лагранжа L5. Цей результат підтверджує гіпотезу про те, що на орбіті екзопланети PDS 70b формується ще одна «троянська» екзопланета. Це дозволяє нам стверджувати, що коорбітальні конфігурації, відомі у Сонячній системі (наприклад,

троянські астероїди Юпітера), є універсальним явищем, здатним виникати і в екзопланетних системах.

Висновки. У роботі було проведене теоретичне дослідження кутового розподілу точок Лагранжа. Використаний у роботі формалізм полярних координат дозволив не лише спростити виведення положень точок Лагранжа, а й отримати аналітичний вираз, що визначає кутове розташування точок Лагранжа L4 та L5, відносно лінії, яка з'єднує перше та друге тіло. На основі одержаного кутового розподілу було встановлено, що в залежності від співвідношення мас двох головних компонент точок Лагранжа L4 та L5 може змінюватися в межах від $\pi/3$ до $\pi/2$. Даний результат був підтверджено на прикладах зоряних систем Groombridge 34, HD 155358 та HD 69830, для яких виконується різні співвідношення мас в діапазонах від $0,443 \cdot 10^{-5}$ до 0,383. Також у роботі був проведений розрахунок кутового розташування газопилової хмарини, що розташовується на орбіті екзопланети PDS70b в екзопланетній зоряній системі PDS70 та аналіз зображень цієї системи. У результаті було показано, що хмара пилу, в якій формується нова планета, розташована у точці Лагранжа L5 системи PDS 70 – PDS 70b. Цей результат підкріплює гіпотезу про те, що на орбіті екзопланети PDS 70b формується ще одна «троянська» екзопланета.

Таблиця 3

Параметри екзопланетної зоряної системи PDS 70 та її точки Лагранжа

Відстань між компонентами, а.о.	Співвідношення мас μ	Відстань до точок Лагранжа від центру мас системи PDS 70 – PDS 70b			
		r_1 , а.о.	r_2 , а.о.	r_3 , а.о.	$r_{4,5}$, а.о.
20,8	0,010	17,68	23,92	21,10	20,90

ЛІТЕРАТУРА:

1. Lagrange J.-L. Essai sur le problème des trois corps, *Paris: Gauthier-Villars*. 1772. 6. P. 229–332.
2. Szebehely V. Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. New York : Academic Press, 1967. 364 p.
3. Murray C. D., Dermott S. F. Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 592 p.
4. Gómez G., Llibre J., Martínez R., Simó C. Dynamics and Mission Design near Libration Points. Vol. 1: Fundamentals. Singapore: World Scientific, 2001. 384 p.
5. Levison H. F., Marchi S., Noll K.S. et al. NASA'S Lucy Mission to Trojan Asteroids: Unraveling the History of the Outer Solar System. *Space Sci Rev*. 2025. 221 (5). P. 63. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11214-025-01173-7>
6. Yeager T., Golovich N., Pruett K. MEGASIM: Distribution and Detection of Earth Trojan Asteroids, *The Astrophysical Journal*. 2024. 961(2). (14pp). DOI: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad1396>
7. Mottola S., Britt D. T., Brown M. E. et al. Shapes, Rotations, Photometric and Internal Properties of Jupiter Trojans, *Space Sci Rev*. 2024. 220 (17). DOI: <https://doi.org/10.1007/s11214-024-01052-7>
8. Christou A. A., Georgakarakos N., Marshall-Lee A., Humpage A., Čuk M., Dell'Oro A. New asteroid clusters and evidence of collisional fragmentation in the L5 Trojan cloud of Mars, *Astronomy & Astrophysics*. 2025. 698. A42 DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202553804>

9. Morbidelli A., Levison H. F., Tsiganis K., Gomes R. Chaotic Capture of Jupiter's Trojan Asteroids in the Early Solar System, *Nature*. 2005. 435 (7041). P. 462 – 465. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature03540>
10. Balsalobre-Ruza O., et al. Evidence for an exo-Trojan in the PDS 70 system, *Astronomy & Astrophysics*. 2023. 675 (A158). DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202346493>
11. J. Donati and all. SPIRou observations of the young planet-hosting star PDS 70, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2024. 535 (4). DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/stae2506>
12. Armitage J. V., Eberlein W. F. Elliptic Functions. Cambridge: Cambridge University Press. 2006. 341 p. ISBN 978-0-521-78078-0.

REFERENCES:

1. Lagrange, J. (1772). Essai sur le problème des trois corps. *Paris: Gauthier-Villars*, 6, 229–332.
2. Szebehely, V. (1967). Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. New York : Academic Press, 364 p.
3. Murray, C. D., Dermott, S. F. (1999). Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 592 p.
4. Gómez, G., Llibre, J., Martínez, R., Simó, C. (2001). Dynamics and Mission Design near Libration Points. Vol. 1: Fundamentals. Singapore: World Scientific, 384 p.
5. Levison, H.F., Marchi, S., Noll, K.S. et al. (2025). NASA'S Lucy Mission to Trojan Asteroids: Unraveling the History of the Outer Solar System. *Space Sci Rev*, 221 (5), 63–69. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11214-025-01173-7>
6. Yeager, T., Golovich, N., Pruet, K. (2024). MEGASIM: Distribution and Detection of Earth Trojan Asteroids. *The Astrophysical Journal*, 961(2), 1–14. DOI: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad1396>
7. Mottola, S., Britt, D. T., Brown, M. E. et al. (2024). Shapes, Rotations, Photometric and Internal Properties of Jupiter Trojans. *Space Sci Rev*, 220 (17), 220–237. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11214-024-01052-7>
8. Christou, A. A., Georgakarakos, N., Marshall-Lee, A., Humpage, A., Čuk, M., Dell'Oro, A. (2025). New asteroid clusters and evidence of collisional fragmentation in the L5 Trojan cloud of Mars. *Astronomy & Astrophysics*, 698, A42. DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202553804>
9. Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., Gomes, R. (2005). Chaotic Capture of Jupiter's Trojan Asteroids in the Early Solar System. *Nature*, 435 (7041), 462–465. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature03540>
10. Balsalobre-Ruza, O., et al. (2023). Evidence for an exo-Trojan in the PDS 70 system. *Astronomy & Astrophysics*, 675, A158. DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202346493>
11. Donati, J. and all. (2024). SPIRou observations of the young planet-hosting star PDS 70. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 535 (4), 3363–3382. DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/stae2506>
12. Armitage, J. V., Eberlein, W. F. (2006). Elliptic Functions. Cambridge: Cambridge University Press. 341 p. ISBN 978-0-521-78078-0.

Дата надходження статті: 28.08.2025

Дата прийняття статті: 19.09.2025

Опубліковано: 30.12.2025