

УДК 537.612.2, 537.612.3

DOI <https://doi.org/10.32782/pet-2022-1-1>

**Володимир ГОЛОВАЦЬКИЙ**

доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри термоелектрики та медичної фізики, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, Україна, 58012

**ORCID ID:** 0000-0002-5573-2562

**SCOPUS-AUTHOR ID:** 6507899727

**Ігор ГОЛОВАЦЬКИЙ**

аспірант кафедри термоелектрики та медичної фізики, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, Україна, 58012

**ORCID ID:** 0000-0002-4435-4607

**SCOPUS-AUTHOR ID:** 57202987360

**Бібліографічний опис статті:** Головацький, В., Головацький, І., (2022). Розрахунок сили взаємодії циліндричних та кільцевих магнітів. *Фізика та освітні технології*, 1, 3–14, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2022-1-1>

## РОЗРАХУНОК СИЛИ ВЗАЄМОДІЇ ЦИЛІНДРИЧНИХ МАГНІТІВ

*Мета даної роботи – розрахувати розподіл індукції магнітного поля кільцевого магніту та дослідити силу його взаємодії з циліндричним магнітом для можливості використання їх у якості магнітної пружини.*

*Розрахунок розподілу індукції магнітного поля циліндричного та кільцевого магнітів виконано на основі методу віртуальних магнітних зарядів та шляхом використання скалярного магнітного потенціалу. Побудовано карту магнітного поля кільцевого магніту та досліджено її еволюцію у залежності від геометричних параметрів магніту. Доведено існування точок нульового поля на осі магніту поблизу його торців, в яких змінюється напрямок поля на протилежний. Отримано аналітичний вираз для індукції магнітного поля на осі кільцевого магніту, на основі якого розраховано залежність сили взаємодії магніту з точковим магнітним диполем.*

*Методом віртуальних магнітних зарядів та числовим інтегруванням розраховано силу взаємодії трубчатого та циліндричного магнітів довільних розмірів. Визначено межі застосовності моделі точкового магнітного диполя для циліндричного магніту. Досліджено магнітні пружини з різними силовими характеристиками. Знайдено такі геометричні розміри магнітів, при яких сила їх взаємодії у робочій області не залежить від зміщення.*

*Результати теоретичних досліджень, що виконані у даній роботі, якісно та кількісно узгоджуються з відомими експериментальними даними і дозволяють удосконалити силові характеристики магнітної пружини.*

*На основі виконаних досліджень в системі Wolfram Mathematica створено комп'ютерну модель, що демонструє карту магнітного поля кільцевого чи трубчатого магніту довільного розміру, а також комп'ютерну модель магнітної пружини на його основі трубчатого та циліндричного магнітів. Комп'ютерні моделі опубліковано з відкритим кодом на сайті Wolfram Demonstration Project і можуть використовуватись як у навчальному процесі, так і для конструювання магніто-механічних пристроїв.*

**Ключові слова:** постійний магніт, магнітне поле, магнітний скалярний потенціал, взаємодія магнітів, метод магнітних зарядів.

**Volodymyr HOLOVATSKY**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Thermoelectricity and Medical Physics, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsyubynsky str., Chernivtsi, Ukraine, 58012

**ORCID ID:** 0000-0002-5573-2562

**SCOPUS-AUTHOR ID:** 6507899727

**Ihor HOLOVATSKYI**

Postgraduate Student at the Department of Thermoelectricity and Medical Physics, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2 Kotsyubynsky str., Chernivtsi, Ukraine, 58012

**ORCID ID:** 0000-0002-4435-4607

**SCOPUS-AUTHOR ID:** 57202987360

**To cite this article:** Holovatsky, V. and Holovatskyi, I. (2022). Rozrakhunok syly vzaiemodii tsylindrychnykh ta kiltsevykh mahnitiv [Magnetic spring on the base ring magnet]. *Physics and Educational Technology*, 1, 3–14, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2022-1-1>

## MAGNETIC SPRING ON THE BASE RING MAGNET

*The purpose of this work is to calculate the magnetic field induction distribution of a ring magnet and to investigate the force of its interaction with a cylindrical magnet for the possibility of using them as a magnetic spring.*

*The calculation of the magnetic field induction distribution of cylindrical and ring magnets was performed on the basis of the method of virtual magnetic charges and by using the scalar magnetic potential. A map of the magnetic field of a ring magnet was constructed and its evolution was investigated depending on the geometrical parameters of the magnet. The existence of points of zero field on the axis of the magnet near its ends, where the direction of the field changes to the opposite, has been proved. An analytical expression for the induction of the magnetic field on the axis of the ring magnet was obtained, on the basis of which the dependence of the force of interaction of the magnet with a point magnetic dipole was calculated.*

*Using the method of virtual magnetic charges and numerical integration, the force of interaction between tubular and cylindrical magnets of arbitrary sizes was calculated. The limits of applicability of the point magnetic dipole model for a cylindrical magnet are determined. Magnetic springs with different strength characteristics were studied. Such geometric dimensions of magnets were found, in which the force of their interaction in the working area does not depend on displacement.*

*The results of the theoretical research carried out in this paper qualitatively and quantitatively agree with the known experimental data and allow to improve the strength characteristics of the magnetic spring.*

*On the basis of the conducted research, a computer model was created in the Wolfram Mathematica system, showing a map of the magnetic field of a ring or tubular magnet of arbitrary size, as well as a computer model of a magnetic spring based on tubular and cylindrical magnets. The computer models are published as open source on the Wolfram Demonstration Project website and can be used both in the educational process and for the construction of magneto-mechanical devices.*

**Key words:** permanent magnet, magnetic field, magnetic scalar potential, interaction of magnets, method of magnetic charges.

### ВСТУП

На даний час на основі рідкоземельних металів створюють потужні постійні магніти різних розмірів та форми, які зберігають намагнічення десятки років при температурах, що не перевищують точку Кюрі. Це дозволяє широко використовувати постійні магніти у якості магнітних пружин, амортизаторів, віброізоляторів і навіть підшипників.

Отже, розрахунок силових характеристик магнітних систем, що складаються з постійних магнітів, є актуальною задачею сучасного приладобудування.

Взаємодія постійних магнітів відбувається через магнітне поле, яке, на відміну від електростатичного, соленоїдальне (вихрове), а лінії індукції є замкнутими. У загальному випадку для опису магнітного поля вводиться векторний потенціал, розрахунок якого складніший, ніж розрахунок скалярного електростатичного потенціалу. Не існує точних аналітичних виразів для розрахунку розподілу індукції магнітного поля навіть для найпростішої системи, що володіє магнітним моментом – колового струму. У загальному випадку ця задача зводиться до розрахунку еліптичних інтегралів,

і лише для деяких симетричних точок простору можна розрахувати магнітну індукцію на основі простих аналітичних виразів. У багатьох наукових роботах для дослідження розподілу індукції магнітного поля постійних магнітів пропонуються різні методи розрахунку: кулонівський метод (метод уявних магнітних зарядів) (Ravaud, 2008; Rakotoarison, 2007), метод еквівалентного соленоїда (Derbya, 2010), метод розрахунку скалярного магнітного потенціалу (Samacho, 2013), а також різні числові методи розв'язку рівняння Лапласа для векторного або скалярного магнітного потенціалу (Прачуковська, 2015; Черкасова, 2014). Останнім методом виконуються числові розрахунки у професійних програмах ELCUT та COMSOL. Усі вказані методи зводять задачу до числового інтегрування.

Огляд літератури показує, що задача пошуку простих методів розрахунку сил взаємодії постійних магнітів різної форми залишається актуальною і сьогодні. У випадку однорідної намагніченості постійних циліндричних магнітів розрахунок розподілу магнітного поля та сили взаємодії між магнітами найпростіше виконувати методом віртуальних магнітних

зарядів, що рівномірно розподілені на основах циліндра. У такому випадку задача розрахунку розподілу напруженості магнітного поля, скалярного магнітного потенціалу та сили взаємодії між магнітами подібна до відповідної електростатичної задачі.

У даній роботі методом віртуальних магнітних зарядів отримано простий аналітичний вираз для індукції магнітного поля на осі кільцевого магніту, який дозволив розрахувати силу взаємодії кільцевого магніту з точковим магнітним диполем (ТМД). Виконано порівняння залежності сили взаємодії магнітів, отриманої в рамках моделі ТМД з результатами числових розрахунків, що враховують реальні розміри та форму циліндричних та кільцевих магнітів.

Числовим методом розраховано силову характеристику магнітної пружини, сила дії якої в робочій області не залежить від зміщення.

### 1. Розрахунок магнітного поля постійних магнітів

Рівняння Максвела для електростатичного та магнітостатичного полів у випадку відсутності струмів провідності можна спростити до такого вигляду

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{rot} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{div} \vec{E} = \rho / (\epsilon \epsilon_0) \quad (1)$$

Для задоволення першого рівняння, достатньо напруженість електричного поля представити через градієнт деякої функції  $\varphi(\vec{r})$  ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ ). Функцію  $\varphi(\vec{r})$  називають потенціалом електростатичного поля. Розрахунок розподілу напруженості електричного поля можна звести до знаходження скалярного потенціалу  $\varphi(\vec{r})$ .

Індукція магнітного поля зовні постійних магнітів при відсутності струмів провідності задовольняє таке ж рівняння як і напруженість електричного поля  $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$ . Якщо вважати, що лінії індукції магнітного поля не замкнені, а починаються і закінчуються на різних полюсах магнітів, на яких розподілені віртуальні магнітні заряди, то аналогія з електростатикою буде очевидна. Тому для визначення індукції магнітного поля зовні постійних магнітів можна ввести скалярний потенціал (Fulrani, 2001). Знаходження скалярного потенціалу магнітного поля  $\Phi(\vec{r})$  у багатьох випадках значно простіше, ніж знаходження векторної функції. Отже, розподіл індукції магнітного поля можна

розрахувати через градієнт від скалярного магнітного потенціалу  $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$ .

Потенціал електричного диполя на великій відстані має вигляд

$$\varphi(r) = \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3}, \quad (2)$$

де величину  $\vec{d} = q\vec{l}$  називають дипольним моментом.

Напруженість електричного поля диполя при  $r \gg l$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^3} = \frac{3(\vec{d}\vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{d}}{r^3}. \quad (3)$$

Розподіл електричного поля диполя, що задається виразом (3), такий же, як і розподіл індукції магнітного поля магнітного диполя

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \frac{(\vec{P}_m \vec{r})}{r^3} = \frac{3(\vec{P}_m \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}_m}{r^3}, \quad (4)$$

де  $\vec{P}_m$  – магнітний момент магніту, який у випадку рівномірної намагніченості постійного магніту можна знайти через вектор намагніченості  $\vec{M} = \vec{P}_m / V$ . Така подібність електростатичного поля та поля постійних магнітів дозволяє використовувати формули електростатики при дослідженні магнітного поля постійних магнітів різних конфігурацій.

Наприклад, визначення магнітного поля, створеного однорідно намагніченим циліндром, подібне до визначення електричного поля однорідно поляризованого діелектричного циліндра. Відомо, що при однорідній поляризації в об'ємі циліндра відсутні об'ємні заряди. При аксіальній поляризації з'являються поверхневі зв'язані заряди протилежного знаку лише на основах циліндра. Величини їх поверхневих густин відрізняються лише знаком  $\sigma = \sigma_+ = -\sigma_-$ .

Густина поверхневих зарядів збігається з величиною нормальної складової вектора поляризації  $\sigma = P_n$ . Аналогічно величина вектора намагніченості однорідного циліндра дорівнює поверхневій густині уявних магнітних зарядів.

Формула (4) справедлива лише для моделі ТМД, тобто при виконанні умови  $r \gg l$ . При дослідженні силових характеристик магнітної пружини дана умова не виконується, тому виконаємо розрахунки магнітного поля, що створене уявними магнітними зарядами, що розподілені на основах циліндра з густиною  $\sigma_m = M$ . Якщо обмежитися лише аксіальною складовою

індукції магнітного поля на осі циліндричного магніта, то аналогічно до подібної електростатичної задачі отримуємо такий вираз:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left( \frac{z+b}{\sqrt{a^2 + (z+b)^2}} - \frac{z-b}{\sqrt{a^2 + (z-b)^2}} \right). \quad (5)$$

Вираз (5), для зручності числових розрахунків, записаний в системі СІ. Початок координат поміщено у центр магніту довжиною  $2b$  та радіусом  $a$ . У загальному випадку, для довільної точки  $A(\rho, z)$  вирази для аксіальної та радіальної компонент містять подвійні інтеграли і не піддаються подальшому спрощенню

$$B_z(\rho, z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{\frac{z+b}{\sqrt{(\rho^2 - 2\rho R \cos \phi + R^2 + (z+b)^2)^3}}}{\frac{z-b}{\sqrt{(\rho^2 - 2\rho R \cos \phi + R^2 + (z-b)^2)^3}}} \right) R dR d\phi, \quad (6)$$

$$B_\rho(\rho, z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{\frac{\rho - R \cos \phi}{\sqrt{(\rho^2 - 2\rho R \cos \phi + R^2 + (z+b)^2)^3}}}{\frac{\rho - R \cos \phi}{\sqrt{(\rho^2 - 2\rho R \cos \phi + R^2 + (z-b)^2)^3}}} \right) R dR d\phi. \quad (7)$$

У граничному випадку  $\rho = 0$  вираз (6) перетворюється до вигляду (5).

Для розрахунку магнітного поля кільцевого магніту (рис. 1) скористаємося принципом суперпозиції полів. За цим принципом, поле кільцевого магніту є сумою полів двох одновісних однорідно намагнічених протилежно напрямлених циліндричних магнітів радіусами  $R$  і  $r$ , що мають однакову довжину –  $2b$ .

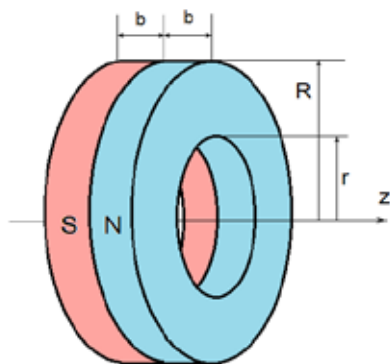


Рис. 1. Схема кільцевого магніту

З формули (5), отримуємо індукцію магнітного поля на осі кільцевого магніту

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left( \frac{\frac{z+b}{\sqrt{R^2 + (z+b)^2}} - \frac{z+b}{\sqrt{r^2 + (z+b)^2}}}{-\frac{z-b}{\sqrt{R^2 + (z-b)^2}} + \frac{z-b}{\sqrt{r^2 + (z-b)^2}}} \right). \quad (8)$$

Індукцію магнітного поля в точках, що не лежать на осі магніту можна отримати числовим розрахунком на основі виразів (6-7).

На рис. 3а) наведено залежність  $B_z(z)$  при різних значеннях довжини магніту. З рис. 3а) видно, що при малих значеннях  $b$  залежність  $B_z(z)$  містить три екстремальних точки. Збільшення величини  $b$  приводить спочатку до збільшення величини магнітного поля в центрі магніту, при  $L=R$  магнітне поле досягає максимуму, а при подальшому збільшенні  $L$  центральний екстремум розділяється на два і величина магнітної індукції в центрі магніту зменшується. У середині магніту формується область, в якій магнітне поле мало залежить від аксіальної координати.

Вплив величини зовнішнього  $R$  та внутрішнього  $r$  радіусів кільцевого магніту на залежність  $B_z(z)$  можна визначити з рис. 3б)-г). Дослідження показують, що збільшення  $R$  та зменшення  $r$  приводить до збільшення величини індукції магнітного поля у внутрішній області кільцевого магніту.

## 2. Розрахунок сили взаємодії магнітів

Розрахунок сили взаємодії аксіально намагнічених циліндричних магнітів є складною задачею, яку можна розв'язувати як числовими так і аналітичними методами (Pérez-Loya, 2014). Один з методів ґрунтується на методі еквівалентного соленоїда. При цьому величина лінійної густини струму, що уявно протікає по бічній поверхні постійного циліндричного магніту, дорівнює величині його намагніченості. Силу взаємодії постійних магнітів можна знайти, використовуючи закон Ампера.

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (9)$$

Інший метод ґрунтується на подібності формул електростатики та магнітостатики, а також на потенціальності магнітного поля постійних магнітів у відсутності струмів провідності. Сила, що діє на елемент уявного магнітного заряду  $dq_m$  одного з магнітів у магнітному полі  $\vec{B}$  іншого магніту, розраховується на основі формули

$$d\vec{F} = dq_m \vec{B}, \quad (10)$$

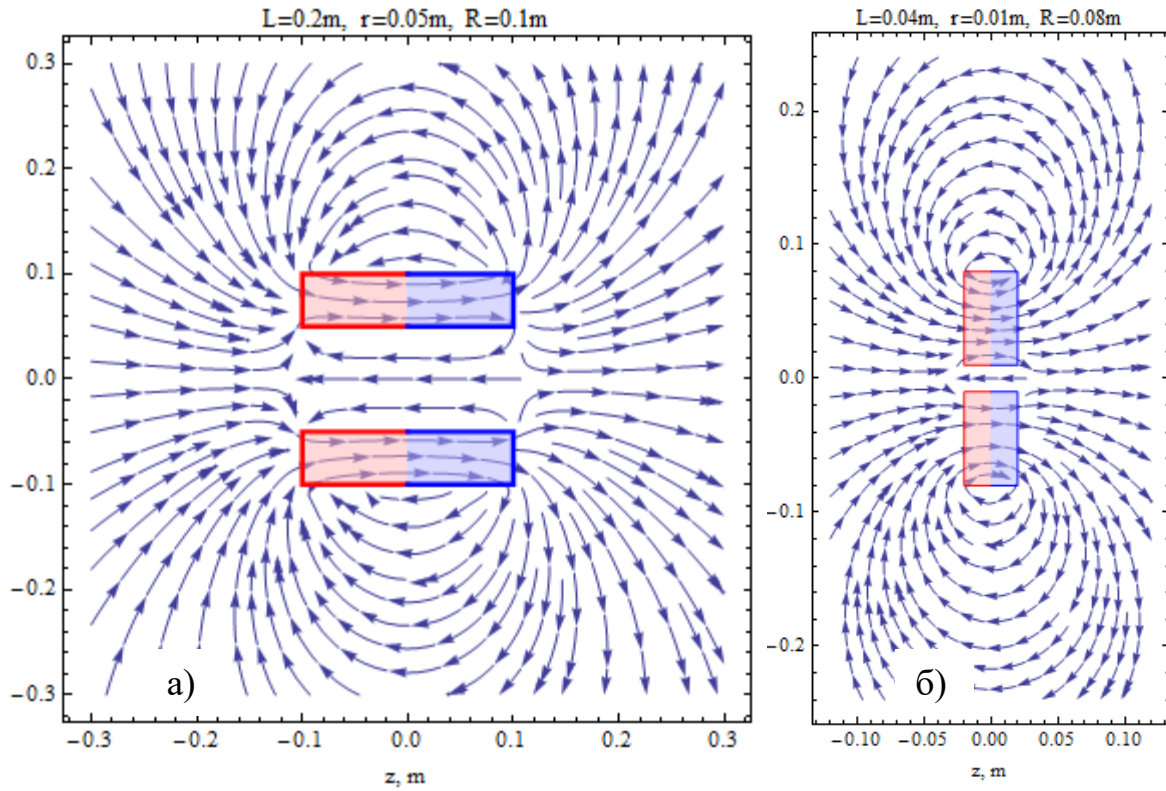


Рис. 2. Розподіл магнітного поля кільцевого магніту а)  $R=10\text{см}$ ,  $r=5\text{см}$ ,  $L=2b=20\text{см}$ ; б)  $R=8\text{см}$ ,  $r=1\text{см}$ ,  $L=2b=4\text{см}$

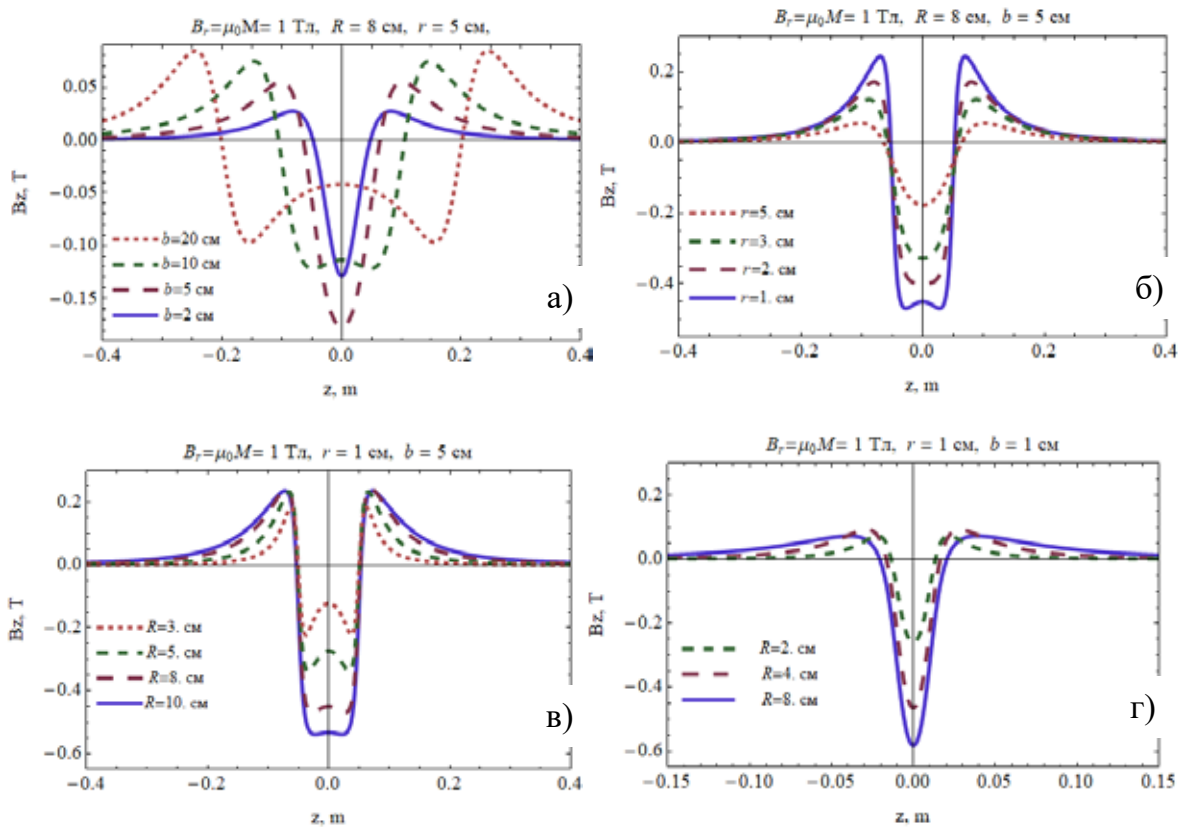


Рис. 3. Залежність індукції магнітного поля кільцевого магніту а)  $R=8\text{см}$ ,  $r=5\text{см}$ ,  $b=2-20\text{см}$ ; б)  $R=8\text{см}$ ,  $b=5\text{см}$ ,  $r=1-5\text{см}$ ; в)  $r=1\text{см}$ ,  $b=5\text{см}$ ,  $R=3-10\text{см}$ ; г)  $r=1\text{см}$ ,  $b=1\text{см}$ ,  $R=2-8\text{см}$

де  $\vec{B}$  – індукція магнітного поля в точці знаходження магнітного заряду  $dq_m$ . Якщо виразити індукцію магнітного поля  $\vec{B}$  через густину поверхневих магнітних зарядів другого магніту

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma_m (\vec{r} - \vec{r}') dS}{(\vec{r} - \vec{r}')^3}, \quad (11)$$

то можна отримати закон взаємодії точкових поверхневих уявних магнітних зарядів

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq_m dq'_m (\vec{r} - \vec{r}')}{(\vec{r} - \vec{r}')^3}, \quad (12)$$

або у вигляді подібному на закон Кулона для точкових електричних зарядів

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2}. \quad (13)$$

Розрахуємо аксіальну складову сили взаємодії елементів заряду двох дисків радіусами  $R_1$  та  $R_2$ , що розташовані на відстані  $z$  один від одного і мають однакову густину уявних магнітних зарядів

$$dF_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{z \sigma_m^2 \rho_1 d\rho_1 d\phi_1 \rho_2 d\rho_2 d\phi_2}{[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + z^2]^{3/2}}. \quad (14)$$

Чотирикратний інтеграл, що отримується для розрахунку сили взаємодії двох полюсів магнітів, можна звести до подвійного

$$F = 2\mu_0 M^2 z \int_{\phi_1}^{R_1} \int_{\phi_2}^{R_2} \frac{E(4\rho_1 \rho_2 / (\rho_1^2 \rho_2^2 + z^2)) \rho_1 \rho_2 d\rho_1 d\rho_2}{((\rho_1 - \rho_2)^2 + z^2) \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 + z^2}}, \quad (15)$$

де  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$  – повний еліптичний інтеграл.

Для розрахунку сили взаємодії між магнітами необхідно врахувати попарну взаємодію між усіма їх полюсами.

Для сили взаємодії великого кільцевого магніту з маленьким циліндричним магнітом, що розташовані на одній осі, можна отримати просту аналітичну формулу, використовуючи потенціальну енергію магнітного диполя у зовнішньому магнітному полі:

$$U = -(\vec{P}_m \vec{B}). \quad (16)$$

Тоді силу можна знайти зі співвідношення  $F_z = -\partial U / \partial z$

$$F_z = P_m \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (17)$$

З формули (17) слідує, що сила, яка переміщує магнітний диполь у просторі, відмінна від нуля тільки у випадку неоднорідного магнітного поля. Магнітний диполь з магнітним моментом, орієнтованим за магнітним полем втягується у область більшого магнітного поля, а якщо магнітний момент диполя протилежний полю, то він виштовхується з області сильнішого поля.

Величина похідної  $\partial B / \partial z$  пропорційна радіальній компоненті індукції магнітного поля. Це впливає з того, що зменшення потоку ліній індукції в напрямку осі  $Oz$  пов'язана зі збільшенням потоку у радіальному напрямку, який пропорційний величині  $B_r$ . Отже, сила, яка переміщує магнітний диполь у аксіальному напрямку, більша там, де більша радіальна складова частина індукції магнітного поля.

Використовуючи вираз (8) для напруженості магнітного поля кільцевого магніту та формулу (17), визначимо силу, з якою магніт діє на точковий магнітний диполь  $P_m$ , що розташований на його осі. Розрахувавши похідну та спростивши вираз, отримаємо силу взаємодії у такому вигляді

$$F(z) = \frac{\mu_0 P_m M}{2} \left[ \frac{R^2}{(R^2 + (z+b)^2)^{3/2}} - \frac{R^2}{(R^2 + (z-b)^2)^{3/2}} - \frac{r^2}{(r^2 + (z+b)^2)^{3/2}} + \frac{r^2}{(r^2 + (z-b)^2)^{3/2}} \right]. \quad (18)$$

На рис. 4а наведено залежність сили взаємодії ТМД з магнітним моментом  $P_m = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$  ( $\vec{P}_m \uparrow \downarrow Oz$ ) з кільцевим магнітом ( $R = 6 \text{ см}, r = 2 \text{ см}, L = 2b$ ) при різних значеннях величини  $b$ . З рисунка видно, що при малих значеннях  $b$  ( $b \leq 2 \text{ см}$ ) залежність  $F(z)$  має вигляд непарної функції з чотирма екстремумами. Між двома внутрішніми екстремумами існує область лінійної залежності сили магнітної взаємодії  $F(z) = -kz$ . Ця сила подібна до сили пружності, яка повертає деформовану пружину до положення рівноваги. При  $b > 2 \text{ см}$  у центрі з'являється область  $F(z) = kz$  з малим значенням коефіцієнта  $k$ . З рис. 4б–4в) можна визначити вплив зовнішнього та внутрішнього радіусів кільцевого магніту на залежності сили  $F(z)$ , що діє на ТМД.

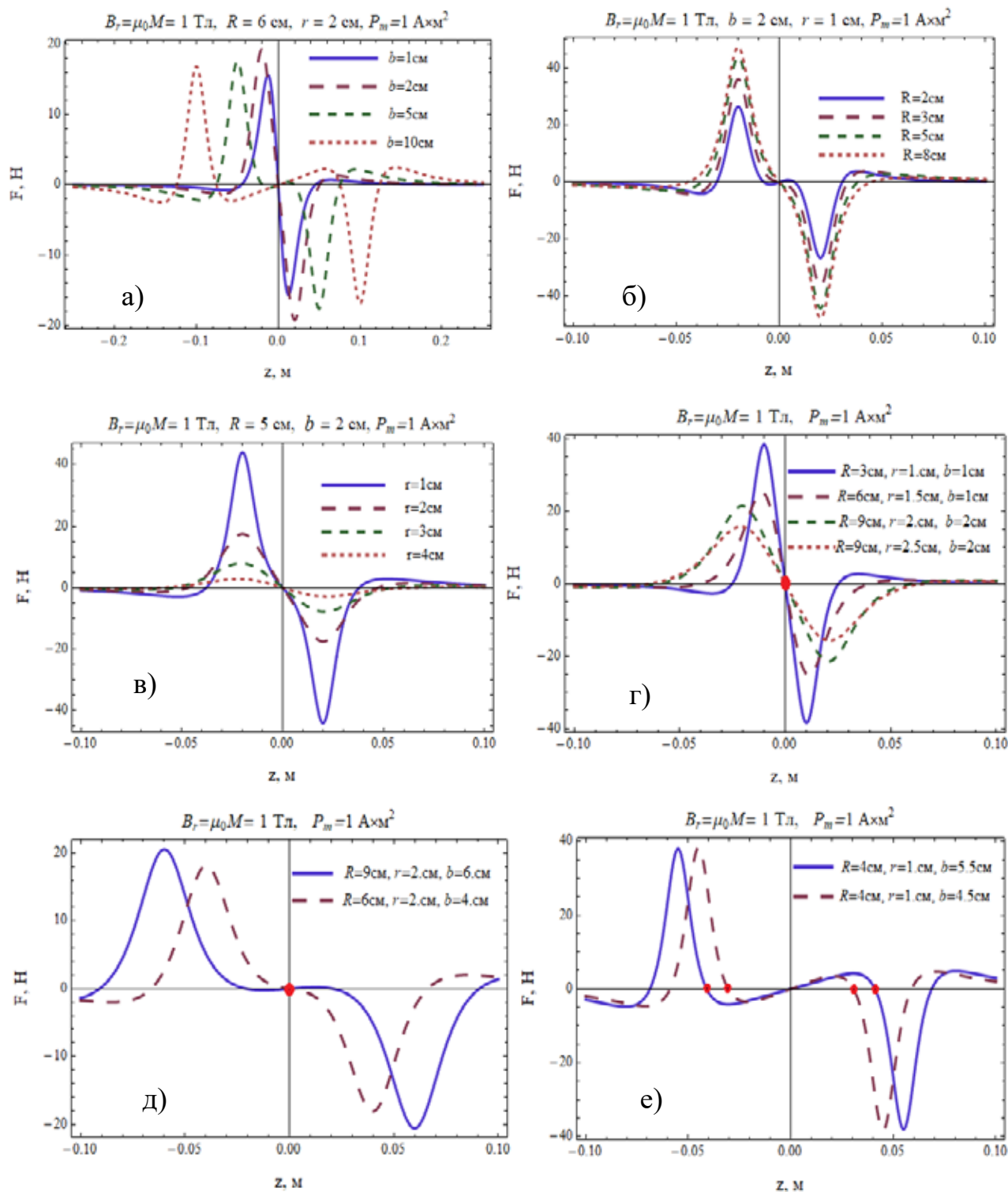
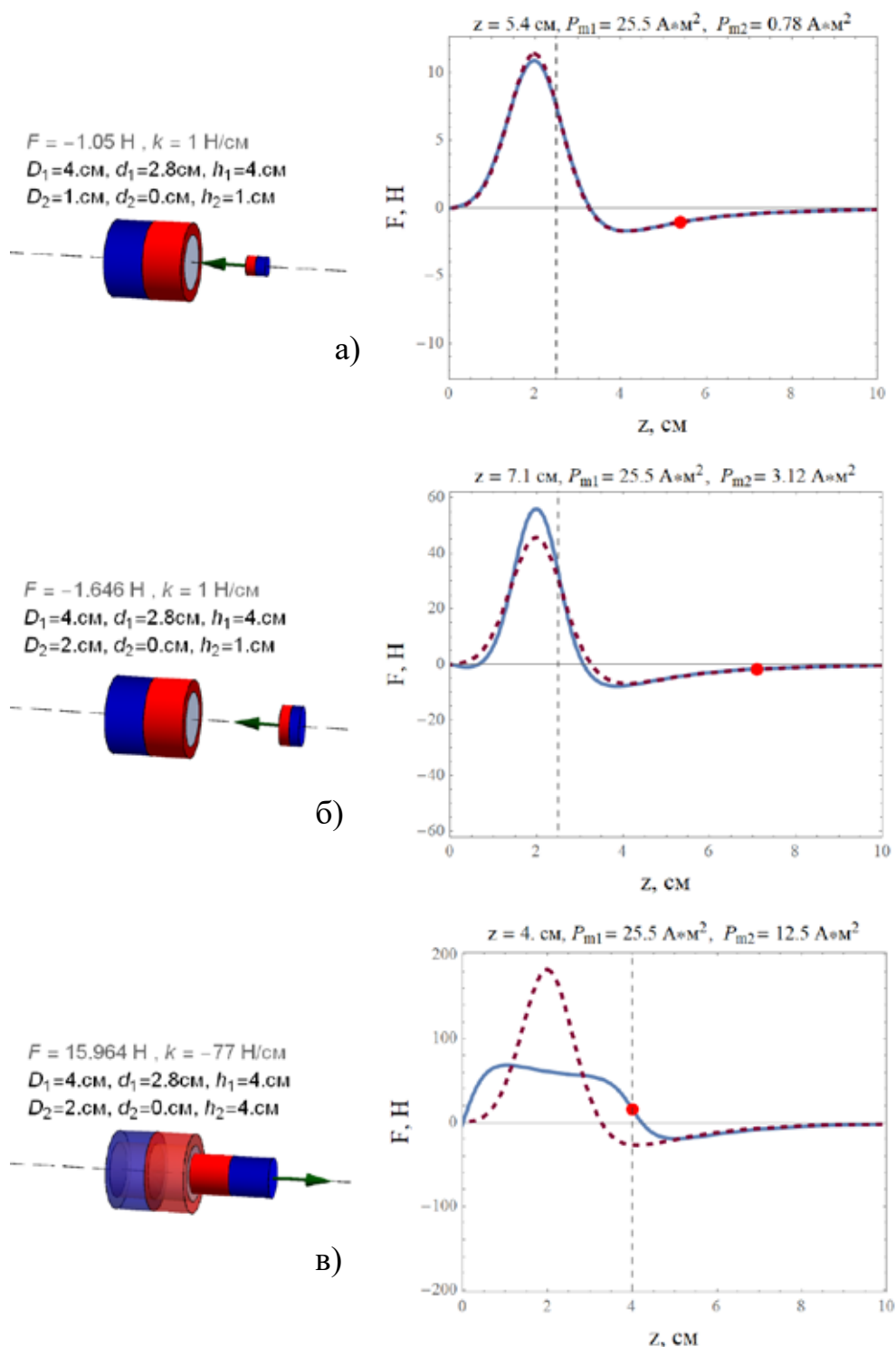


Рис. 4. Залежність сили взаємодії точкового магнітного диполя з кільцевим магнітом різних розмірів від відстані між їх центрами

При великих відстанях між магнітами  $z > b \div 4b$  сила направлена вздовж осі Oz ( $F > 0$ ), що відповідає відштовхуванню. Поблизу точки нульового поля сила змінює знак (область притягання).

Усі форми функції  $F(z)$  можна розділити на три основні групи: 1) з лінійною залежністю сили у центральній області магніту (рис. 4г), при цьому існує одна точка стійкої рівноваги ( $z=0$ ); 2) нелінійна залежність сили

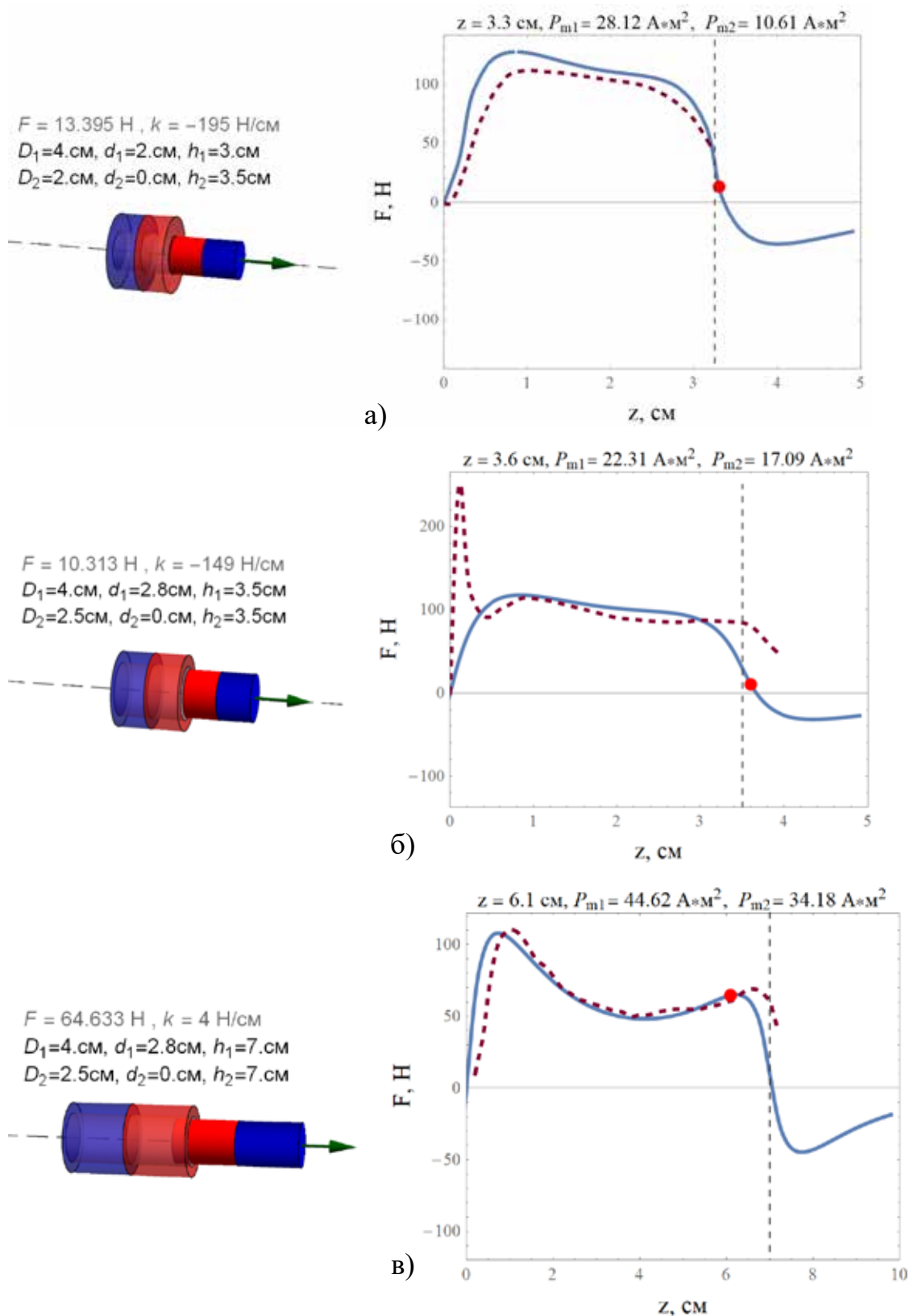


**Рис. 5. Залежність сили взаємодії магнітів від відстані між їх центрами. Суцільна лінія – результат розрахунку за формулою (15); штрихова лінія – розрахунок за формулою (18) в рамках моделі ТМД**

у центральній області магніту з однією точкою стійкої рівноваги. У граничному випадку з'являється область байдужої рівноваги (рис. 4д); 3) існування двох точок стійкої рівноваги та точки нестійкої рівноваги ( $z=0$ ).

Величина  $P_m = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$  відповідає циліндричному магніту з такими розмірами  $r = 1 \text{ cm}, b = 2 \text{ mm}$  та однорідною намагніченістю  $M = 1/4\pi \cdot 10^7 \text{ A/m}$  (залишкова індукція  $B_r = \mu_0 M = 1 \text{ Tl}$ ).

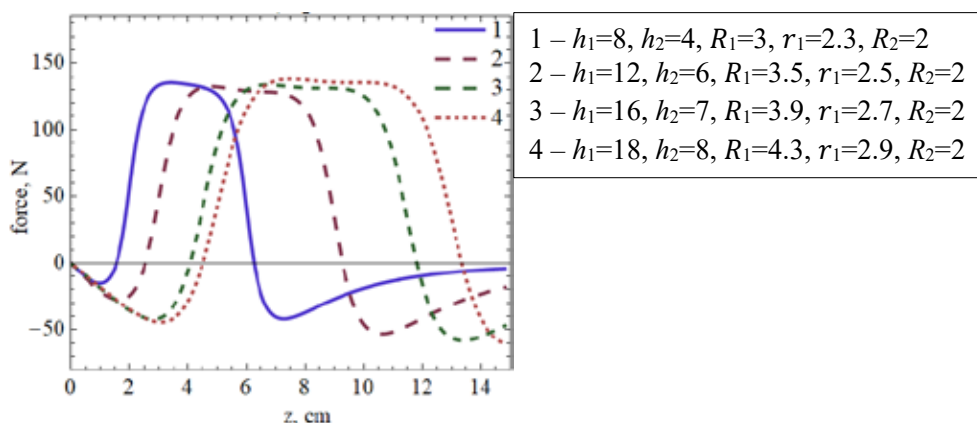




**Рис. 6.** Співставлення результатів теоретичних розрахунків (суцільна лінія) з експериментальними даними (штрихова лінія)

Усі отримані типи силових характеристик взаємодії магнітів можуть знайти практичне використання у різноманітних магніто-меха-

нічних пристроях, але вони справедливі лише при виконанні умов застосовності наближення ТМД. Щоб оцінити допустимі розміри магні-



**Рис. 7. Параметри і силові характеристики магнітних пружин з постійною силою та різною довжиною робочої області**

тів, для яких такі умови виконуються на рис. 5, наведено залежності сили взаємодії магнітів різних розмірів, розраховані за формулою (18) в наближенні ТМД (штрихова лінія) та числовим інтегруванням за формулою (15) (суцільна лінія).

Як видно з рис. 5, аналітична формула (18) з непоганою точністю описує силу взаємодії великого кільцевого та малого циліндричного магнітів, що розташовані на одній осі. Точність погіршується при малих відстанях між магнітами у таких випадках: а) радіус циліндричного магніту близький до внутрішнього радіусу кільцевого магніту; б) довжини магнітів близькі між собою. При відстанях між магнітами, що перевищує їх розміри, аналітична формула достатньо точно описує силу взаємодії.

Отже, аналітичний вираз для сили взаємодії, отриманий в рамках моделі ТМД, можна використовувати при виконанні вказаних умов.

### 3. Співставлення теоретичних розрахунків з експериментальними даними

Для перевірки точності розрахунку силової характеристики взаємодії магнітів, які виконано числовим інтегруванням за формулою (15), співставимо їх з експериментальними даними, які наведено в роботах (Цивіліцин, 2013, 2014). У цих роботах описано експериментальні дослідження магнітної пружини з унікальною силовою характеристикою: у робочій області цієї пружини сила взаємодії магнітів не залежить від зміщення.

На рис. 6 наведено силові характеристики  $F(z)$  для трьох різних магнітних пружин, що досліджені експериментально та відповідні

залежності, які розраховані за формулою (15) в рамках вищеприписаної теорії.

З рис. 6 видно, що результати числового розрахунку якісно та кількісно збігаються для магнітних пружин малих та великих розмірів. При довжині магнітної пружини 70мм яскраво проявляються максимуми, які майже точно збігаються з максимумами теоретично розрахованої кривої. Гострий пік експериментальної кривої, який спостерігається на рис. 6 б), не може бути обґрунтованим в рамках даної теорії. Для його пояснення необхідна більш детальна інформація про умови експерименту та характеристики магнітів, що використовувались.

Як виявилось, при великих розмірах магнітної пружини авторам експерименту не вдалося отримати силову характеристику з постійною силою. Тому за допомогою комп'ютерної моделі, що створена в рамках даного теоретичного дослідження, для покращення силової характеристики магнітної пружини вдалося підібрати такі розміри постійних магнітів, при яких сила втягування у робочій області не залежить від зміщення. Силові характеристики таких магнітних пружин наведено на рис. 7.

### ВИСНОВКИ

Методом уявних магнітних зарядів отримано аналітичні вирази для розподілу індукції магнітного поля вздовж осі кільцевого магніту та розрахунку сили взаємодії його з точковим магнітним диполем.

Встановлено межі застосовності аналітичного виразу для розрахунку сили взаємодії кільцевого та циліндричного магнітів шляхом порівняння з результатами числового розра-

хунку сили взаємодії магнітів довільних розмірів. Створено та опубліковано на сайті Wolfram Demonstration Project комп'ютерні демонстрації, які дозволяють розрахувати розподіл магнітного поля та силу взаємодії кільцевих та циліндричних магнітів різних розмірів.

Результати теоретичних розрахунків добре узгоджуються із серією відомих експериментальних даних, отриманих під час дослідження

магнітної пружини, сила втягування якої не залежить від зміщення. За допомогою комп'ютерних моделей вдалося підібрати оптимальні розміри магнітів для удосконалення магнітної пружини.

Комп'ютерна програма, що створена в рамках цієї роботи, дозволяє визначити характерні розміри магнітів для отримання заданих силових характеристик магнітної пружини.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Ravaud R., Lemarquand G., Lemarquand V., Depollier C. Analytical Calculation of the Magnetic Field Created by Permanent-Magnet Rings. *IEEE Transactions On Magnetics*. 2008. Vol. 44. № 8. P. 1982–1989.
2. Rakotoarison H., Yonnet J., Delinchant B. Using coulombian approach for modelling scalar potential and magnetic field of a permanent magnet with radial polarization. *IEEE Transactions On Magnetics*. 2007. Vol. 43. № 4. P. 1261–1264.
3. Derbya N., Olbert S. Cylindrical magnets and ideal solenoids. *Am. J. Phys.* 2010. Vol. 78. № 3. P. 229–235.
4. Camacho J., Sosaa V. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista Mexicana de Fisica E*. 2013. Vol. 59. P. 8–17.
5. Прачуковска А., Новицки М., Коробийчук І., Шевчик Р., Салах Я. Моделирование и верификация распределения магнитного поля постоянных магнитов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2015. Т. 6/5. № 78. С. 4–11.
6. Черкасова О.А. Исследование магнитного поля постоянного магнита с помощью компьютерного моделирования. *Гетеромагнитная электроника*. 2014. № 17. С. 112–120.
7. Fulrani P. Permanent Magnet and electromechanical devices. *Academic press*. 2001.
8. P'erez-Loya J., Lundin U. Optimization of Force Between Cylindrical Permanent Magnets. *IEEE Magnetics Letters*. 2014. Vol. 5. P. 0800404.
9. Цивіліцин В.Ю., Мільман Ю.В., Гончарук В.А., Бондар І.Б., Створення магнітних пружин із заданою силовою характеристикою. *Доповіді Національної академії наук України*. 2013. № 3. С. 90–94.
10. Цивіліцин В.Ю., Мільман Ю.В., Гончарук В.А., Бондар І.Б. Розрахунок та експериментальне дослідження сили втягування магнітних пружин двох типів. *Український фізичний журнал*. 2014. Т. 59. № 10. С. 1022–1027.
11. Цивіліцин В.Ю. *Патент на корисну модель* UA 83233 U заявка u201304109 від 02.04.201 опубл. 27.08.2013.
12. Holovatsky V., Holovatska Y. Interacting Cylindrical Magnets. Wolfram demonstration project. URL: <https://demonstrations.wolfram.com/InteractingCylindricalMagnets/>.
13. Holovatsky V., Holovatska Y. Magnetic field of a hollow cylindrical magnet. Wolfram demonstration project. URL: <https://demonstrations.wolfram.com/MagneticFieldOfAHollowCylindricalMagnet/>.

#### REFERENCES:

1. Ravaud R., Lemarquand G., Lemarquand V., Depollier C. Analytical Calculation of the Magnetic Field Created by Permanent-Magnet Rings. *IEEE Transactions On Magnetics*. 2008. Vol. 44. № 8. P. 1982–1989.
2. Rakotoarison H., Yonnet J., Delinchant B. Using coulombian approach for modelling scalar potential and magnetic field of a permanent magnet with radial polarization. *IEEE Transactions On Magnetics*. 2007. Vol. 43. № 4. P. 1261–1264.
3. Derbya N., Olbert S. Cylindrical magnets and ideal solenoids. *Am. J. Phys.* 2010. Vol. 78. № 3. P. 229–235.
4. Camacho J., Sosaa V. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista Mexicana de Fisica E*. 2013. Vol. 59. P.8–17.
5. Prachukovska A., Novitski M., Koribiyuchuk I., Shevchyk R., Salah Y., Modeling and verification of the distribution of the magnetic field of permanent magnets. *Eastern European Journal of Advanced Technologies*. 2015. Vol. 6/5. № 78, P. 4–11.
6. Cherkasova O.A. Study of the magnetic field of a permanent magnet using computer simulation. – *Heteromagnetic electronics*. – 2014. – № 17, С. 112-120.
7. Fulrani P. Permanent Magnet and electromechanical devices, *Academic press*, 2001.
8. P'erez-Loya J., Lundin U. Optimization of Force Between Cylindrical Permanent Magnets. - *IEEE Magnetics Letters*. – 2014. - V.5, P. 0800404.
9. Tsvilitsin V.Yu., Milman Yu.V., Goncharuk V.A., Bondar I. B., The creation of magnetic springs from a given power characteristic. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2013. - № 3, P.90-94.

10. Tsivilitsin V.Yu., Milman Yu.V., Goncharuk V.A., Bondar I. B., Rozrahunok, that experimental study of the retraction force of magnetic springs of two types. – UJP. - 2014. V. 59, № 10, P.1022-1027.
11. Tsivilitsin V.Yu., Patent for useful model UA 83233 U application u201304109 02.04.201 publish. 27.08.2013.
12. Holovatsky V., Holovatska Y. Interacting Cylindrical Magnets. Wolfram demonstration project URL: [https://demonstrations.wolfram.com/ InteractingCylindricalMagnets/](https://demonstrations.wolfram.com/InteractingCylindricalMagnets/).
13. Holovatsky V., Holovatska Y. Magnetic field of a hollow cylindrical magnet. Wolfram demonstration project URL: [https://demonstrations.wolfram.com/ MagneticFieldOfAHollowCylindricalMagnet/](https://demonstrations.wolfram.com/MagneticFieldOfAHollowCylindricalMagnet/).